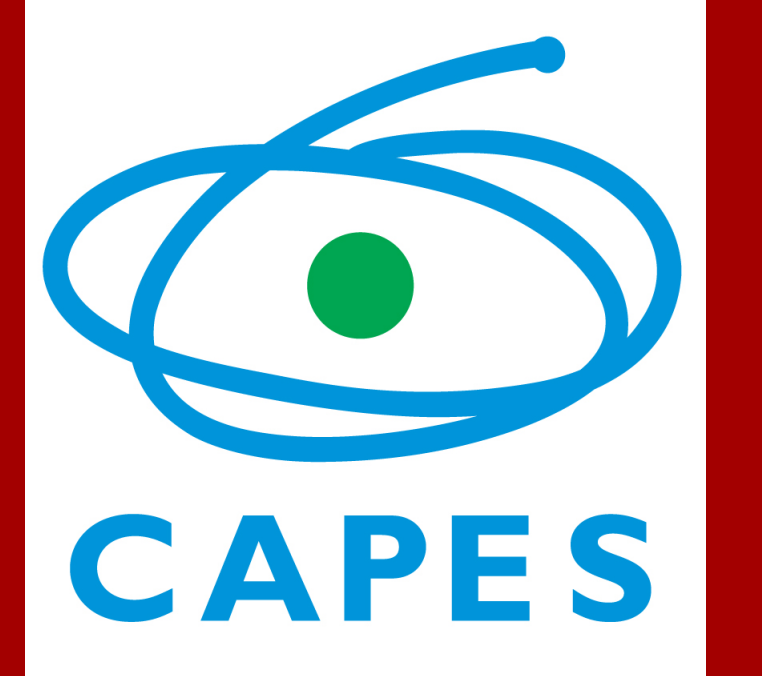


Estudo de singularidades monodrômicas em sistemas lineares por partes



Letícia Cândido e Kamila Andrade (orientadora)
 Instituto de Matemática e Estatística
 Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, Brasil
 leticia.souzacndd@gmail.com, kamila.andrade@ufg.br,



32º Colóquio Brasileiro de Matemática

Resumo

Um marco na evolução das Equações Diferenciais Ordinárias foi o trabalho de Henri Poincaré “*Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*” (1881), onde foram apresentadas as ideias básicas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. Esta teoria veio crescendo e possibilitando diferentes aplicações em várias áreas da ciência e, uma forma interessante de estudar as mesmas é através de sistemas de equações diferenciais definidas por partes, onde, muitas vezes é possível obter uma melhor aproximação dos resultados teóricos com o mundo real. Esta classe de sistemas consiste em considerar-se, no domínio de interesse, dois ou mais campos vetoriais agindo em regiões disjuntas separadas por uma fronteira comum.

Introdução

Seja 0 um valor regular da função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e defina $\Sigma = h^{-1}(0)$. Desta forma, Σ é a fronteira comum entre as regiões $\Sigma^\pm = \{\pm h(x, y) > 0\}$. O campo vetorial suave por partes $X = (X^+, X^-)$ é definido por

$$X(q) = \begin{cases} X^+(q), & \text{se } q \in \Sigma^+, \\ X^-(q), & \text{se } q \in \Sigma^-, \end{cases}$$

onde X^\pm são campos vetoriais suaves em \mathbb{R}^2 . Se X^\pm são lineares e $h(x, y) = y$ o campo X acima pode ser reescrito da seguinte forma:

$$(X^+, X^-) = \begin{cases} (a^+x + b^+y + c^+, d^+x + e^+y + f^+), & y > 0, \\ (a^-x + b^-y + c^-, d^-x + e^-y + f^-), & y < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Neste contexto, as trajetórias são definidas segundo a convenção de Filippov, [1]:

- Σ é região de costura se, para $p \in \Sigma$, $(X^+h(p))(X^-h(p)) > 0$;
- Σ é região de escape se, para $p \in \Sigma$, $(X^+h(p)) > 0$ e $(X^-h(p)) < 0$;
- Σ é região de deslize se, para $p \in \Sigma$, $(X^+h(p)) < 0$ e $(X^-h(p)) > 0$.

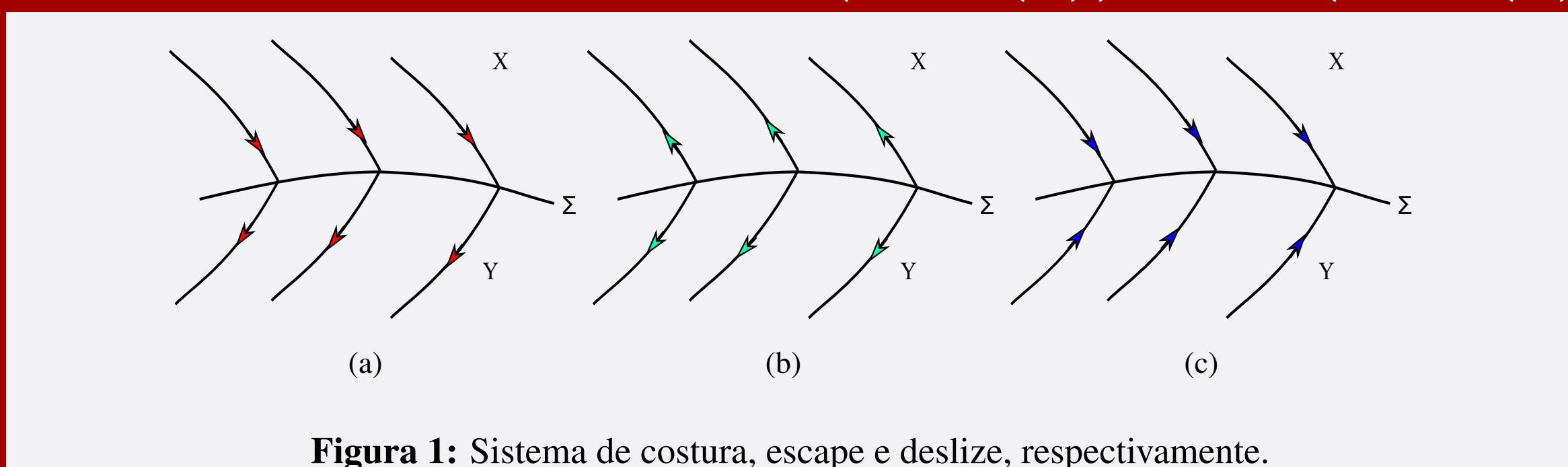


Figura 1: Sistema de costura, escape e deslize, respectivamente.

Caso o sistema (1) seja um sistema de costura, i.e., um campo vetorial suave por partes admitindo apenas regiões de costura e singularidades em Σ , então o mesmo pode ser escrito da forma:

$$X(x, y) = \begin{cases} (\mu_0^+ + \mu_1^+x + \mu_2^+y, x), & y > 0, \\ (\mu_0^- + \mu_1^-x + \mu_2^-y, x), & y < 0. \end{cases} \quad (2)$$

O objetivo deste trabalho é provar o seguinte resultado:

Proposição 1. Considere o campo vetorial dado por (2) quando $\mu_0^\pm \neq 0$ e a origem é uma singularidade monodômica. Então a origem é assintoticamente estável (instável) se $\mu_0^+\mu_0^-(\mu_1^+\mu_0^- - \mu_1^-\mu_0^+) < 0 (> 0)$ ou $\mu_1^+\mu_0^- - \mu_1^-\mu_0^+ = 0$ e $\mu_0^+\mu_1^+(\mu_2^+(\mu_0^-)^2 - \mu_2^-(\mu_0^+)^2) < 0 (> 0)$ respectivamente. Além disso, a origem é um centro se, e somente se, $\mu_1^-\mu_0^+ - \mu_1^+\mu_0^- = \mu_1^+(\mu_2^+(\mu_0^-)^2 - \mu_2^-(\mu_0^+)^2) = 0$.

Prova da Proposição 1

Para determinar a estabilidade do ciclo limite podemos analisar as constantes de Lyapunov associadas ao campo. Calculamos através da composição de duas aplicações de meio retorno, $\Pi(x_0) = \Pi^-(\Pi^+(x_0))$. Equivalentemente podemos estudar a diferença desses dois mapas: $\Delta(x_0) = \pi^-(x_0) - \pi^+(x_0)$ onde $\pi^+(x_0) = \Pi^+(x_0)$ e $\pi^-(x_0) = (\Pi^-(x_0))^{-1}$.

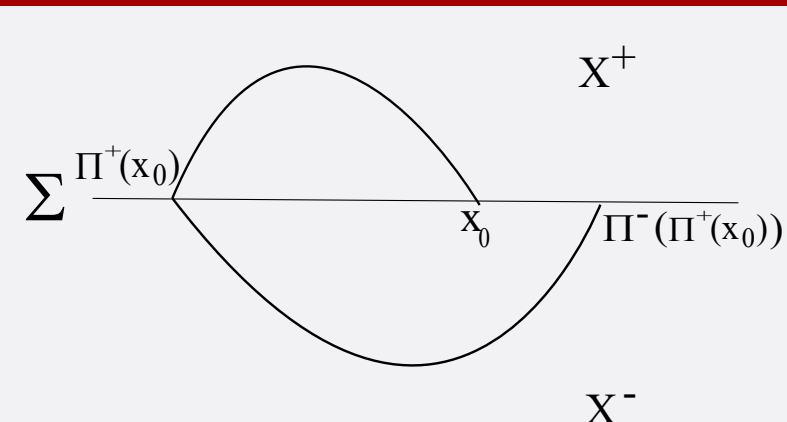


Figura 2: Esboço da composição $\Pi(x_0)$.

As aplicações de primeiro retorno para os campos dados no sistema (2) são:

$$\pi^\pm(x_0) = -x_0 + \frac{2\mu_1^\pm}{3\mu_0^\pm}x_0^2 - \frac{4(\mu_1^\pm)^2}{9(\mu_0^\pm)^2}x_0^3 + \frac{2(22(\mu_1^\pm)^2 + 9\mu_2^\pm)\mu_1^\pm}{135(\mu_0^\pm)^3}x_0^4 - \frac{4(26(\mu_1^\pm)^2 + 27\mu_2^\pm)\mu_1^2}{405(\mu_0^\pm)^4}x_0^5 + \dots$$

e, então, temos:

$$\Delta(x_0) = \left(-\frac{2\mu_1^+}{3\mu_0^+} + \frac{2\mu_1^-}{3\mu_0^-} \right) x_0^2 + \left(\left(\frac{2\mu_1^+}{3\mu_0^+} \right)^2 - \left(\frac{2\mu_1^-}{3\mu_0^-} \right)^2 \right) x_0^3 + \left(\left(\frac{2(22(\mu_1^+)^2 + 9\mu_2^+)\mu_1^+}{135(\mu_0^+)^3} \right) + \left(-\frac{2(22(\mu_1^-)^2 + 9\mu_2^-)\mu_1^-}{135(\mu_0^-)^3} \right) \right) x_0^4 + \left(\left(\frac{4(\mu_1^+)^2(26(\mu_1^+)^2 + 27\mu_2^+)}{405(\mu_0^+)^4} \right) - \left(\frac{4(\mu_1^-)^2(26(\mu_1^-)^2 + 27\mu_2^-)}{405(\mu_0^-)^4} \right) \right) x_0^5 \dots$$

Onde cada uma dessas diferenças serão denotadas por V_i , $i \in \mathbb{N}$, chamadas constantes de Lyapunov e fornecem as informações que buscamos em relação à singularidade monodômica.

- $V_1 = 0$;
- $V_2 = \frac{2\mu_1^-\mu_0^+ - \mu_1^+\mu_0^-}{\mu_0^+\mu_0^-}$;
- Se $V_2 = 0$ então $V_3 = \frac{4(\mu_1^+\mu_0^-)^2 - (\mu_1^-\mu_0^+)^2}{9(\mu_0^+\mu_0^-)^2} = 0$;
- Se $V_2 = V_3 = 0$ então $V_4 = \frac{2\mu_1^+(\mu_2^-(\mu_0^+)^2 - \mu_2^+(\mu_0^-)^2)}{15(\mu_0^-)^2(\mu_0^+)^3}$;
- Se $V_4 = 0 \Rightarrow \mu_1^+ = 0$ ou $\mu_2^-(\mu_0^+)^2 - \mu_2^+(\mu_0^-)^2 = 0$. Logo, $V_5 = \frac{4\mu_1^+(\mu_2^+(\mu_0^-)^2 - \mu_2^-(\mu_0^+)^2)}{15(\mu_0^+)^4(\mu_0^-)^2} = 0$.

A prova termina fazendo $V_2 = V_4 = 0$ e mostrando que, através da mudança de coordenadas $(x, y, t) \rightarrow (x, -y, -t)$, o centro obtido é reversível.

Note que, por conta da existência de apenas duas condições em que conseguimos centro, apenas uma bifurcação com ciclo limite na origem pode ser garantida.

Quando $\mu_0^\pm \neq 0$ a ordem máxima de foco-fraco do campo vetorial (2) é um. Além do mais, se $\mu_0^+\mu_1^+(\mu_2^+(\mu_0^-)^2 - \mu_2^-(\mu_0^+)^2) < 0 (> 0)$ então existe $\epsilon > 0 (< 0)$ suficiente pequeno tal que, para $\mu_1^- = (\mu_1^+\mu_0^+(\mu_0^-)^2 - \epsilon) / ((\mu_0^+)^2\mu_0^-)$ um ciclo limite estável (instável) bifurca na origem por uma bifurcação de Hopf.

Conclusão e Direções Futuras

Definimos assim restrições para que exista ciclo limite em um campo vetorial suave por partes com região de costura, estudando também sua estabilidade. Prosseguimos o trabalho buscando a prova da unicidade dessa órbita periódica isolada para a nossa classe de campos vetoriais.

Referências

- [1] FILIPPOV A. F., *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Math. Appl. (Sov. Ser.), vol 18, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.
- [2] FREIRE E., PONCE E., RODRIGO F., TORRES F., *Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones*, Internat. J. Bifur. Chaos (2002), 12(08), 1675-1702.
- [3] MEDRADO J. C., TORREGROSA J., *Uniqueness of limit cycles for sewing planar piecewise linear systems*, J. Math. Anal. Appl. 431 (2015), 529-544
- [4] PERKO L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Vol 7. Springer Science & Business Media, 2013.