Uma aplicação de Sistema Dinâmico unidimensional

Leonardo Henrique Soria & Marcus Augusto Bronzi

Universidade Federal de Uberlândia
Bolsista do PET Matemática
leo.hsoria@hotmail.com

Resumo

O objetivo básico da teoria dos Sistemas Dinâmicos é entender o comportamento eventual ou assintótico de um processo interativo. Se o processo for um processo discreto, como a iteração de uma função, então a teoria espera entender o comportamento eventual das órbitas $x, f(x), f^2(x) \dots f^n(x)$ quando n se torna grande.

Neste trabalho tentaremos ilustrar, pelo menos parcialmente, para uma das classes mais simples de Sistemas Dinâmicos: os sistemas unidimensionais. Em particular trabalharemos em um modelo de aplicações do círculo S^1.

Definições elementares

Apresentamos inicialmente alguns conceitos importantes para estabelecer a próxima seção.

Definição 1. *Seja $S \subset \mathbb{R}$. O ponto $x \in \mathbb{R}$ é um ponto de aderência de S se existe uma sequência $x_n \in S$ convergindo para x.*

Exemplo 2. *Se $I := \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, então 0 é um ponto de aderência de I, pois $x_n = \frac{1}{n} \in I$ e $x_n \longrightarrow 0$. Note que nem sempre o ponto aderente pertence ao conjunto.*

Dado um conjunto S, o conjunto dos pontos de aderência de S é denotado por $\overline{S}$ e chamado de fecho de S.

Definição 3. *Um subconjunto U de S é denso em S se $\overline{U} = S$*

Exemplo 4. *Se $U = \mathbb{Q}$ então $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Uma maneira de demonstrar é considerar a represetação decimal de um número irracional $a_0, a_1a_2a_3 \dots$. A sequência de truncamentos,

$$x_n = a_0, a_1a_2 \dots a_n = \frac{a_0a_1a_2 \dots a_n}{100 \dots 0}.$$

Logo, $x_n \in \mathbb{Q}$ e $x_n \longrightarrow a$. ∎

Definição 5. *A orbita positiva de x é o conjunto dos pontos $x, f(x), f^2(x) \dots$ e é denotado por $O^+(x)$. Se f é um homeomorfismo podemos definir a órbita completa de x, $O(x)$, como o conjunto de pontos $f^n(x)$ para $n \in \mathbb{Z}$.*

Teorema 6 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Tal resultado pode ser obtido em [2] ∎

Rotação em S^1

Nessa seção apresentaremos um importante exemplo da teoria dos Sistemas Dinâmicos unidimensionais.

Exemplo 7 (Rotação do Círculo). *Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$. Os mapas T_λ se comportam de maneira bastante diferentes dependendo da racionalidade ou irracionalidade de λ. Se $\lambda = p/q$, com p, q inteiros então $T_\lambda^q(\theta) = \theta + 2\pi p = \theta$ e T_λ fixa todos os pontos na q-ésima iteração. Quando λ é irracional a situação é um tanto quanto diferente.*

O resultado a seguir é conhecido como Teorema de Jacob.

Teorema 8. *Toda órbita de T_λ é densa em S^1 se λ é irracional.*

Demonstração. Seja $\theta \in S^1$. Assim, os pontos da órbita de θ são distintos, pois, se $T_\lambda^n(\theta) = T_\lambda^m(\theta)$ teremos que $(n-m)\lambda \in \mathbb{Z}$ e portanto $n = m$.

Como S^1 é limitado, a órbita de θ admite subsequência convergente. Portanto, dado $\epsilon > 0$ devem existir inteiros n e m tais que

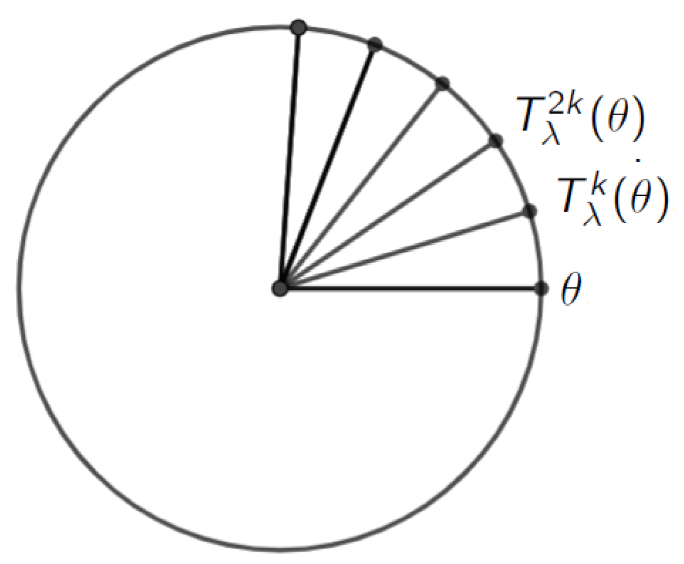
$$| T_\lambda^n(\theta) - T_\lambda^m(\theta) | < \epsilon \Longrightarrow | T_\lambda^{n-m}(\theta) - \theta | < \epsilon.$$

Se considerarmos $k = n - m$ temos $| T_\lambda^k(\theta) - \theta | < \epsilon$.

T_λ preserva o comprimento em S^1, consequentemente o mapa de T_λ^k conecta θ e $T_\lambda^k(\theta)$ por um arco de comprimento menor do que ϵ.

Se aplicarmos T_λ^k temos que os pontos $T_\lambda^k(\theta)$ e $T_\lambda^{2k}(\theta)$ também estão conectados por um arco de comprimento menor do que ϵ. Em particular segue que os pontos $\theta, T_\lambda^k(\theta), T_\lambda^{2k}(\theta), \dots$ particionam S^1 em arcos de comprimento menor do que ϵ. Logo, todo α pertencente à S^1 deve pertencer a algum dos arcos com extremidades na órbita de θ. E para concluir, para todo $\theta \in S^1$, para todo $\epsilon > 0$, existe um T_λ^{ik} pertencente à órbita de θ tal que

$$| \theta - T_\lambda^{ik}(\theta) | < \epsilon.$$



Circunferência sendo particionada em arcos de comprimento menor do que ϵ. Fonte: Autor.

∎

Referências

[1] An introduction to chaotic dynamical systems, Addison-Wesley Publishing Company. DEVANEY, Robert L, 1989, 2nd ed.

[2] Análise Real volume 1: Funções de uma variável, Rio de Janeiro: IMPA. LIMA, Elon Lages. 2006, 8ed.