O Problema de Tveberg

Leandro Vicente Mauri

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC-USP)

leandro.mauri@usp.br

Resumo

Em 1966 o matemático norueguês Helge Tveberg propôs uma conjectura, a qual se tornou um problema famoso de geometria combinatorial. Apesar de ser falsa em geral (mesmo valendo para alguns casos específicos), desta conjectura derivaram muitos problemas interessantes que continuam em aberto até hoje.

Algumas definições importantes

K- SIMPLEXO: Um k- simplexo σ é o fecho convexo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ de $(k+1)$ pontos geometricamente independentes. Os pontos de A são chamados *vértices* de σ e denotados por $V(\sigma)$. A *dimensão* de σ é definida como sendo $|V(\sigma)| - 1 = k$ e denotada por $dim\ \sigma$.

FACE DE UM K- SIMPLEXO: Uma *face* de um k-simplexo σ é o fecho convexo de um subconjunto de vértices de σ.

COMPLEXO SIMPLICIAL: Um *complexo simplicial* é uma família não vazia Δ de simplexos que satisfazem as duas condições seguintes:

(C.S. 1) Seja $\sigma \in \Delta$, então toda face de σ está em Δ.

(C.S. 2) Sejam $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$, então a intersecção $\sigma_1 \cap \sigma_2$ é uma face de σ_1 e de σ_2 ao mesmo tempo.

N-SIMPLEXO $||\sigma^N||$: O N-simplexo $||\sigma^N||$ é o fecho convexo do conjunto $A = \{e_1, ..., e_{N+1}\}$, onde $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ tem todas as coordenadas nulas, exceto a i-ésima coordenada que tem valor igual a 1.

A Conjectura Topológica de Tveberg

A partir das definições acima, a Conjectura Topológica de Tveberg pode ser enunciada da seguinte forma:

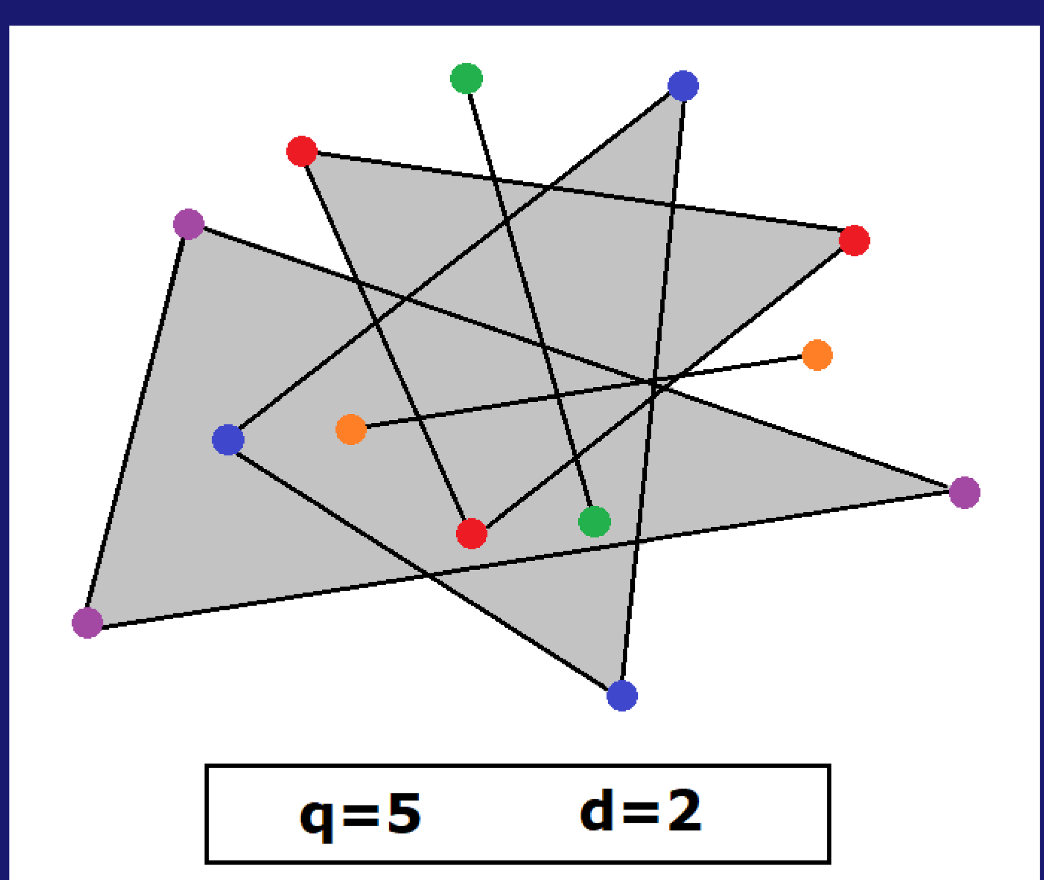
CONJECTURA TOPOLÓGICA DE TVEBERG

Sejam $d \geq 1$ e $q \geq 2$ inteiros e $N = (d+1)(q-1)$. Para cada aplicação contínua $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$, existem q faces disjuntas $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_q$ de σ^N tais que:

$$f(||\sigma_1||) \cap f(||\sigma_2||) \cap ... \cap f(||\sigma_q||) \neq \emptyset.$$

A Conjectura pode ser visualizada da seguinte forma: Sejam $q \geq 2$ e $d \geq 1$ inteiros quaisquer. Dados $(q-1)(d+1)+1$ pontos em $\mathbb{R}^d$. Podemos particionar estes $(q-1)(d+1)+1$ pontos em q subconjuntos disjuntos tais que os fechos convexos destes r subconjuntos se interceptam.

A Figura abaixo ilustra o caso para $q = 5$ e $d = 2$, onde temos $(q-1)(d+1)+1 = (5-1)(2+1)+1 = 13$ pontos em $\mathbb{R}^2$, onde podemos particionar estes 13 pontos em 5 subconjuntos disjuntos (na Figura cada subconjunto é representado por uma cor) tais que os fechos convexos destes subconjuntos se interceptam.



A evolução do estudo da Conjectura Topológica de Tveberg

A Conjectura Topológica para o caso $q = 2$ é conhecida particularmente como *Teorema de Radon* e foi demonstrada em 1979 por Bajmóczy e Barány em [1].

Em 1981, Barány, Schlosman e Szücs demonstraram a conjectura para o caso onde q é um número primo, conforme temos em [2].

Estendendo o resultado de 1981, Özadin [5] e Volovikov [6] demonstraram, de forma independente, que a conjectura é verdadeira para todo $q = p^r$ potência de primo. Essa versão ficou então conhecida como *Teorema Topológico de Tveberg*.

Esse resultado é surpreendente, pois mostra a veracidade da conjectura através de propriedades de divisibilidade de q. O segredo para a validade nesse caso se deve ao fato de que o grupo $\mathbb{Z}_{p^r}$ tem a *Propriedade de Borsuk-Ulam*, uma propriedade, como sugere o nome, relacionada com o famoso *Teorema de Borsuk-Ulam*, de Topologia Algébrica.

TEOREMA DE BORSUK-ULAM

Seja $n \geq 0$. Dada uma aplicação contínua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.

A conjectura para $q \geq 2$ inteiro qualquer permaneceu em aberto até 2015, quando Florian Frick [4] demonstrou o Teorema abaixo, que afirma que para alguns casos específicos a Conjectura falha.

TEOREMA CONTRAEXEMPLO DE FRICK

Sejam $r \geq 6$ um inteiro que não é uma potência de primo, e $k \geq 3$ um inteiro qualquer. Seja $N = (r-1)(rk+2)$. Então existe uma aplicação contínua $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^{rk+1}$ tal que existem r faces de $\sigma_1, ..., \sigma_r$ de σ^N, duas a duas disjuntas, onde $f(\sigma_1) \cap ... \cap f(\sigma_r) = \emptyset$.

Referências

[1] Ervin G Bajmóczy and Imre Bárány. On a common generalization of borsuk's and radon's theorem. *Acta Mathematica Hungarica*, 34(3-4):347–350, 1979.

[2] Imre Bárány, Senya B Shlosman, and András Szücs. On a topological generalization of a theorem of tverberg. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(1):158–164, 1981.

[3] Pavle VM Blagojević, Florian Frick, and Günter M Ziegler. Tverberg plus constraints. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 46(5):953–967, 2014.

[4] Florian Frick. Counterexamples to the topological tverberg conjecture. *arXiv preprint arXiv:1502.00947*, 2015.

[5] Murad Özadin. Equivariant maps for the symmetric group. *University of Wisconsin, Madison*, page 17, 1987.

[6] Aleksei Yu Volovikov. On the van kampen-flores theorem. *Mathematical Notes*, 59(5):477–481, 1996.

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora, Prof^{a} Dr^{a} Denise de Mattos, ao ICMC-USP e o IMPA. Agradeço também a FAPESP (Processo 2018/23928-2), pelo suporte financeiro.