A Dinâmica Simbólica de Difeomorfismos com Conjunto Recorrente por Cadeia Hiperbólico

Karen de A. F. Rodrigues & Mariana Gesualdi Villapouca

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

karenafrodrigues@gmail.com

impa Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Uma característica marcante nos difeomorfismos que possuem seu conjunto recorrente por cadeia hiperbólico é possuírem uma estrutura que pode ser estudada via dinâmica simbólica.
Neste trabalho, apresentaremos um exemplo de tal tipo de difeomorfismo em S^2 e estudaremos sua dinâmica a partir da construção de seu subshift de tipo finito e de sua matriz de interseção geométrica.

Preliminares

No que segue, seja $f : M \to M$ onde M é uma variedade compacta.

Definição 1. *Seja S um conjunto finito com a topologia discreta e a relação $\to$. O **subshift de tipo finito** determinado por S e $\to$ é o homeomorfismo*

$$\begin{aligned} \sigma : \ \Sigma \ &\longrightarrow \Sigma \\ (s_i) &\longmapsto (s_i') \end{aligned}$$

onde $s_i' = s_{i+1}$ e Σ é definido por

$$\Sigma = \{(s_i) = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots) | s_i \in S, s_i \to s_{i+1} \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

O homeomorfismo σ como definido é denominado shift a esquerda.

Definição 2. *A **matriz de interseção geométrica** A correspondente a um difeomorfismo f e a um conjunto de alças $H = \cup h_i$ é dada por:*

$$A_{ij} = \textit{número de componentes de } h_i \cap f(h_j)$$

O subshift de tipo finito e a matriz de interseção geométrica A se relacionam da seguinte forma:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } s_i \to s_j \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Teorema 1. *Se f é um difeomorfismo hiperbólico com respeito a um conjunto de alças $H = \cup h_i$ e $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H)$, então $f|_\Lambda$ é topologicamente conjugada ao subshift de tipo finito $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$, onde A é a matriz de interseção geométrica correspondente a f e H.*

Proposição 1. *Seja $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ o subshift correspondente à A, então cardinalidade do conjunto de pontos fixos de σ é igual ao traço de A.*

Proposição 2. *Se $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ é o subshift correspondente à A, então são equivalentes:*

(a) A é irredutível.

(b) σ tem uma órbita densa.

Se qualquer uma das condições é satisfeita então os pontos periódicos de σ são densos em Σ_A.

Difeomorfismo em S^2

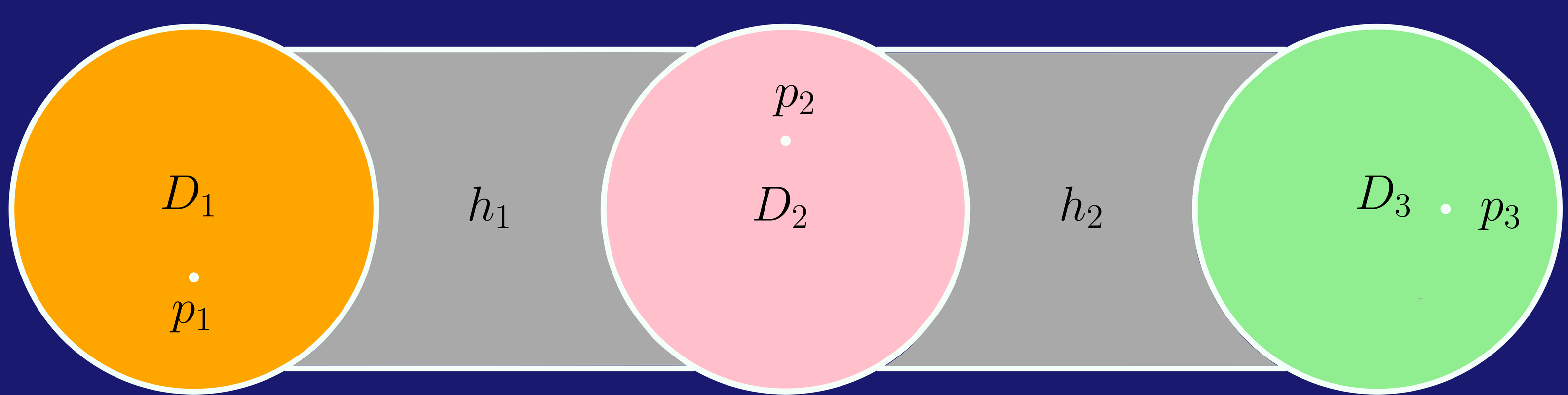

Figura 1: Região em $S^2 - D$ onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é o disco que contém o repulsor ∞.

$$\mathcal{R}(f) = \{p_1, p_2, p_3\} \cup \Lambda \cup \{\infty\}$$

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(h_1 \cup h_2)$$

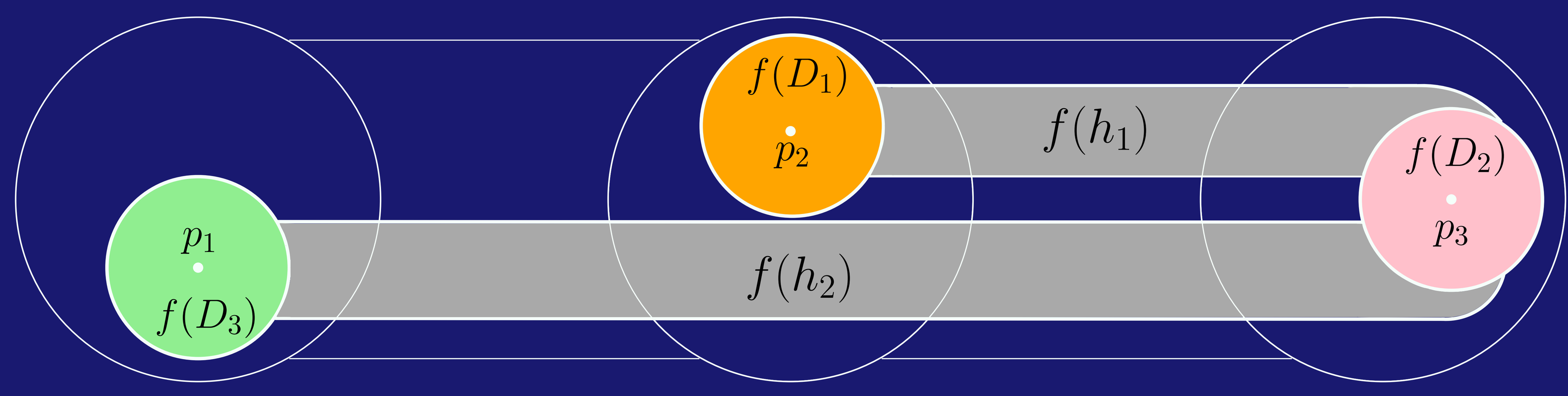

Figura 2: Primeira iterada de f.

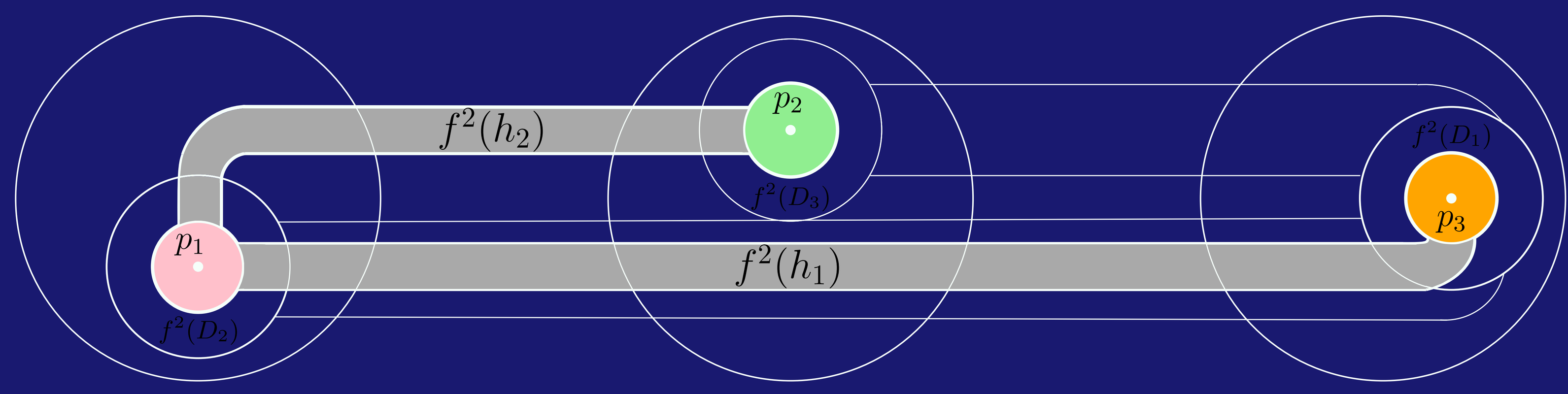

Figura 3: Segunda iterada de f.

Note que $p_1 = f(p_3) = f^2(p_2) = f^3(p_1)$.

Dinâmica Simbólica

Temos que a matriz de interseção geométrica correspondente a f e ao conjunto de alças $H = h_1 \cup h_2$ é da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomamos o conjunto $\{1, 2\}$ com a topologia discreta consideramos o espaço $\Sigma = \prod_{-\infty}^{\infty} \{1, 2\}$ com a topologia produto. Considere a função $\psi : \Lambda \to \Sigma$ definida por $\psi(x) = (x) = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ onde para cada $n \in \mathbb{Z}$

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{se } f^n(x) \in h_1 \\ 2, & \text{se } f^n(x) \in h_2 \end{cases}$$

Assim, consideramos o subconjunto

$$\Sigma_A \subset \Sigma = \{x | x_i = 1 \Rightarrow x_{i+1} = 2\}$$

e neste definimos o shift a esquerda $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$. Pelo Teorema 1, temos que σ é topologicamente conjugado a $f|_\Lambda$ por ψ.
Temos, pelas Proposições 1 e 2, que:

1. $f|_\Lambda$ tem um único ponto fixo.
2. $f|_\Lambda$ tem uma órbita densa em Λ.
3. Os pontos periódicos de $f|_\Lambda$ são densos em Λ.

Conclusão

A partir da construção da matriz de interseção geométrica e do subshift de tipo finito podemos rapidamente identificar características marcantes da dinâmica do difeomorfismo escolhido.

Referências

[1] FRANKS, J. M., *Homology Theory and Dynamical Systems*, CBMS Regional Conference Series in Mathemathcs, n.49. Providence: American Mathematical Society, 1982.

[2] VILLAPOUCA, M. G., *A Teoria do Índice de Conley Discreta para Conjuntos Básicos Zero-Dimensionais*, Tese de Doutorado, UNICAMP. 2013

Agradecimentos

ime

FAPERJ Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

UERJ Universidade do Estado do Rio de Janeiro