Construção de Fractais utilizando o Teorema de Napoleão

José Augusto da Costa Jacomeli & Fernando Pereira de Souza

Universidade Federal de Mato Grasso do Sul
gu_jacomeli@outlook.com

Resumo

O presente trabalho apresenta uma aplicação do Teorema de Napoleão na construção de Fractais. O objetivo é aplicar o teorema em um triângulo equilátero obtendo a famosa figura “Estrela de Davi”. Nosso estudo mostra que cada ponta da estrela também são triângulos equiláteros, permitindo assim aplicar o teorema nos triângulos menores, e assim sucessivamente, obtendo um fractal. O artigo apresenta as propriedades geométricas da área e perímetro da figura obtida, usando conceitos de séries numéricas.

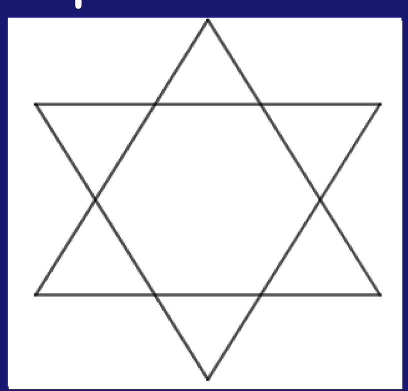
Introdução

O Teorema de Napoleão é um dos clássicos teoremas na área de geometria que apresenta diversas provas, generalizações e variantes. Por muitas vezes o Teorema vem sido esquecido e pouco estudo em cursos de graduação em matemática.

Apesar de não ser provado sua participação em relação a criação, o nome do Teorema é atribuído à Napoleão Bonaparte (1769 – 1821), que além de tudo era um grande admirador das ciências exatas.

O trabalho está inserido em uma atividade de pesquisa individual do grupo PET Conexões de Saberes Matemática CPTL/UFMS, que tem como objetivo revisar e ampliar o conhecimento com conceitos que por sua vez podem ser esquecidos ou podem não fazer parte da grade curricular do curso.

Primeiramente foi estudado o Teorema de Napoleão e sua demonstração, logo após, aplicamos o Teorema em um triângulo equilátero de lado l, obtemos assim a figura:



A figura a seguir consiste na Estrela de Davi, sendo 2 triângulos equiláteros congruentes de posições opostas, e ainda, cada ponta é um triângulo equilátero, logo podemos aplicar novamente o Teorema, e assim sucessivamente, formando um fractal.

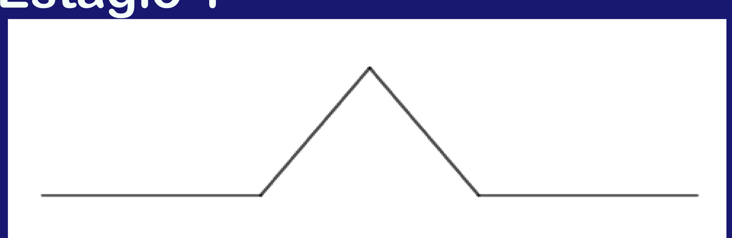
Resultados

Teorema de Napoleão: Seja ΔABC um triângulo arbitrário, em seus lados foram construídos triângulos equiláteros, os ortocentros desses triângulos formará um novo triângulo equilátero.

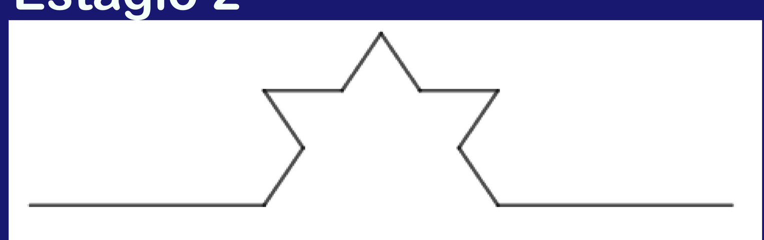
Ao aplicarmos o teorema em um triângulo equilátero de lado *l*, obteremos a famosa Estrela de Davi (figura 1), que consiste em 2 triângulos equiláteros congruentes de posições opostas, e ainda, por meio de semelhança de triângulos podemos concluir que os triângulos menores formados em suas pontas são equiláteros e ainda, que o hexágono central formado será regular.

Assim, aplicaremos novamente o teorema nos triângulos menores das pontas, e assim sucessivamente. Assim:

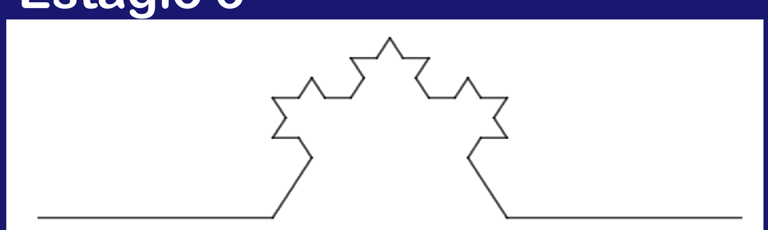
Estágio 1



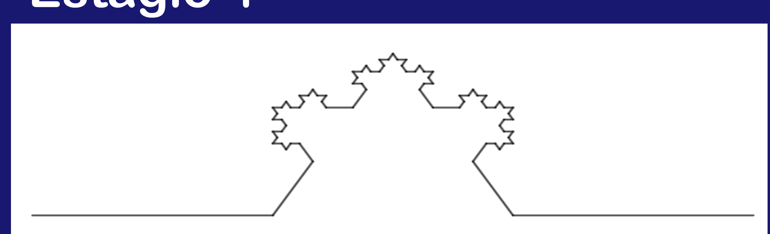
Estágio 2



Estágio 3



Estágio 4



Assim, observando o Perímetro de cada estágio temos:

Estágio	N° de Lados Fixos	Proporção dos lados fixos	N° de Lados novos	Proporção dos lados novos
1	-	-	$2^2.3$	1/3
2	-	-	$2^4.3$	$\frac{1}{3^2}$
3	$2^2 3$	$\frac{1}{3^2}$	$2^4 3^2$	$\frac{1}{3^3}$
4	$2^2 3$ $2^2 3^2$	$\frac{1}{3^2}$ $\frac{1}{3^3}$	$2^4 3^3$	$\frac{1}{3^4}$
5	$2^2 3$ $2^2 3^2$ $2^2 3^3$	$\frac{1}{3^2}$ $\frac{1}{3^3}$ $\frac{1}{3^4}$	$2^4 3^4$	$\frac{1}{3^5}$

Logo, teremos a seguinte relação para o n-ésimo estágio:

$$P_n = \sum_{k=1}^{n-2} 2^2 3^k \frac{l}{3^{k+1}} + 2^4 3^{n-1} \frac{2^2 l}{3} (n - 2 + 2^2) = \frac{4l}{3}(n+2).$$

Assim, quando tendemos a aplicação infinita do Teorema

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4l}{3}(n+2) = +\infty$$

Ou seja, temos que o perímetro tenderá ao infinito aplicando o teorema infinitas vezes

Agora, observando a área de cada estágio, temos:

Estágio	Hexágono	Triângulos fixos	Proporção do lado dos triângulos fixos	Triângulos novos	Proporção do lado dos Triângulos novos
1	1	-	-	2.3	$\frac{1}{3}$
2	1	2.3	$\frac{1}{3}$	$2^2.3$	$\frac{1}{3^2}$
3	1	2.3 $2^2.3$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3^2}$	$2^2 3^2$	$\frac{1}{3^3}$
4	1	2.3 $2^2.3$ $2^2 3^2$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3^2}$ $\frac{1}{3^3}$	$2^2 3^3$	$\frac{1}{3^4}$
5	1	2.3 $2^2.3$ $2^2 3^2$ $2^2 3^3$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3^2}$ $\frac{1}{3^3}$ $\frac{1}{3^4}$	$2^2 3^4$	$\frac{1}{3^5}$

Logo, teremos a seguinte relação para o n-ésimo estágio:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}l^2}{3} + \sqrt{3}l^2 \left(3\frac{l}{3^4} + 3^2 \frac{l}{3^6} + 3^3 \frac{l}{3^8} + 3^4 \frac{l}{3^{10}} + \cdots \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}l^2}{3} + \sqrt{3}l^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2}$$

quando n tende ao infinito, é uma série geométrica com razão a, -1<a<1, então a série converge. Portanto, a área do fractal é finita.

Conclusão

Os Fractais são poucos estudados no curso de graduação e neste trabalho foi possível reunir conceitos de geometria, cálculo e estudo de fractais. A figura obtida se assemelha com a ilha de Koch e possui as mesmas propriedades, perímetro infinito e área finita.

Referências

[1] ALVES, D. S. *Os Teoremas Esquecidos pelos Professores de Geometria Plana do Ensino Médio.* Dissertação (UFMS) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

[2] GONZAGA. G. C. S. *Teorema de Napoleão: Origem, Demonstração e Aplicações.* Dissertação (UFG) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015.