

Seções Cônicas e Sistemas Dinâmicos

João Victor Uzita

Universidade Estadual de Campinas - IMECC

uzita05@gmail.com

Resumo

Dado um elemento $B \in \mathfrak{sl}(2)$, iremos mostrar que as órbitas da exponencial $e^{t\text{ad}(B)}$ restritas ao cone determinado pelo núcleo da forma de Cartan-Killing coincidem com as seções cônicas determinadas por um plano associado a B .

Introdução

Seja

$$\mathfrak{sl}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \text{ onde } a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

o conjunto das matrizes 2×2 de traço nulo. Dado um elemento $B \in \mathfrak{sl}(2)$, podemos associar de maneira natural o sistema dinâmico

$$\dot{X}(t) = \text{ad}(B) \cdot X(t), \quad X(t) \in \mathfrak{sl}(2). \quad (1)$$

Tal sistema se restringe naturalmente ao núcleo da forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{sl}(2)$ que, na base adequada, é um cone duplo. Nosso objetivo é analisar as soluções de (1) restritas a esse cone e mostrar que tais trajetórias são dadas como a interseção do cone com um plano determinado por B .

Setup Geométrico

Dados $A, B \in \mathfrak{sl}(2)$, o colchete de A e B é definido por

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A.$$

Dado um elemento $B \in \mathfrak{sl}(2)$ define-se então a *adjunta* de B como sendo a transformação linear

$$\text{ad}(B) : \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \mathfrak{sl}(2), \quad \text{ad}(B)(X) := [B, X], \quad X \in \mathfrak{sl}(2).$$

Em $\mathfrak{sl}(2)$ a *forma de Cartan-Killing* é a forma bilinear simétrica dada por

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4} \text{tr}(X \cdot Y), \quad X, Y \in \mathfrak{sl}(2).$$

A relação do colchete com a forma de Cartan-Killing é dada por

$$\langle [X, Y], Z \rangle = \langle X, [Y, Z] \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{sl}(2). \quad (2)$$

Tal forma está associada com o produto interno em $\mathfrak{sl}(2)$ dado por

$$(X, Y) = \langle X, Y^* \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{sl}(2),$$

onde Y^* denota a transposta de Y .

Consideremos em $\mathfrak{sl}(2)$ a seguinte base ortogonal

$$\beta = \left\{ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Note que transpor um elemento $B \in \mathfrak{sl}(2)$ nessa base nada mais é que refletir B pelo plano gerado por $\{H, S\}$, pois $H^* = H$, $S^* = S$ e $A^* = -A$.

A forma quadrática associada à forma de Cartan-Killing é então

$$Q : \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(X) := \langle X, X \rangle.$$

Com relação a base β , seu núcleo é dado por

$$\mathcal{C} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha_3^2\}$$

que é um cone duplo cujas geratrizes tem inclinação de 45 graus com o plano gerado por $\{H, S\}$.

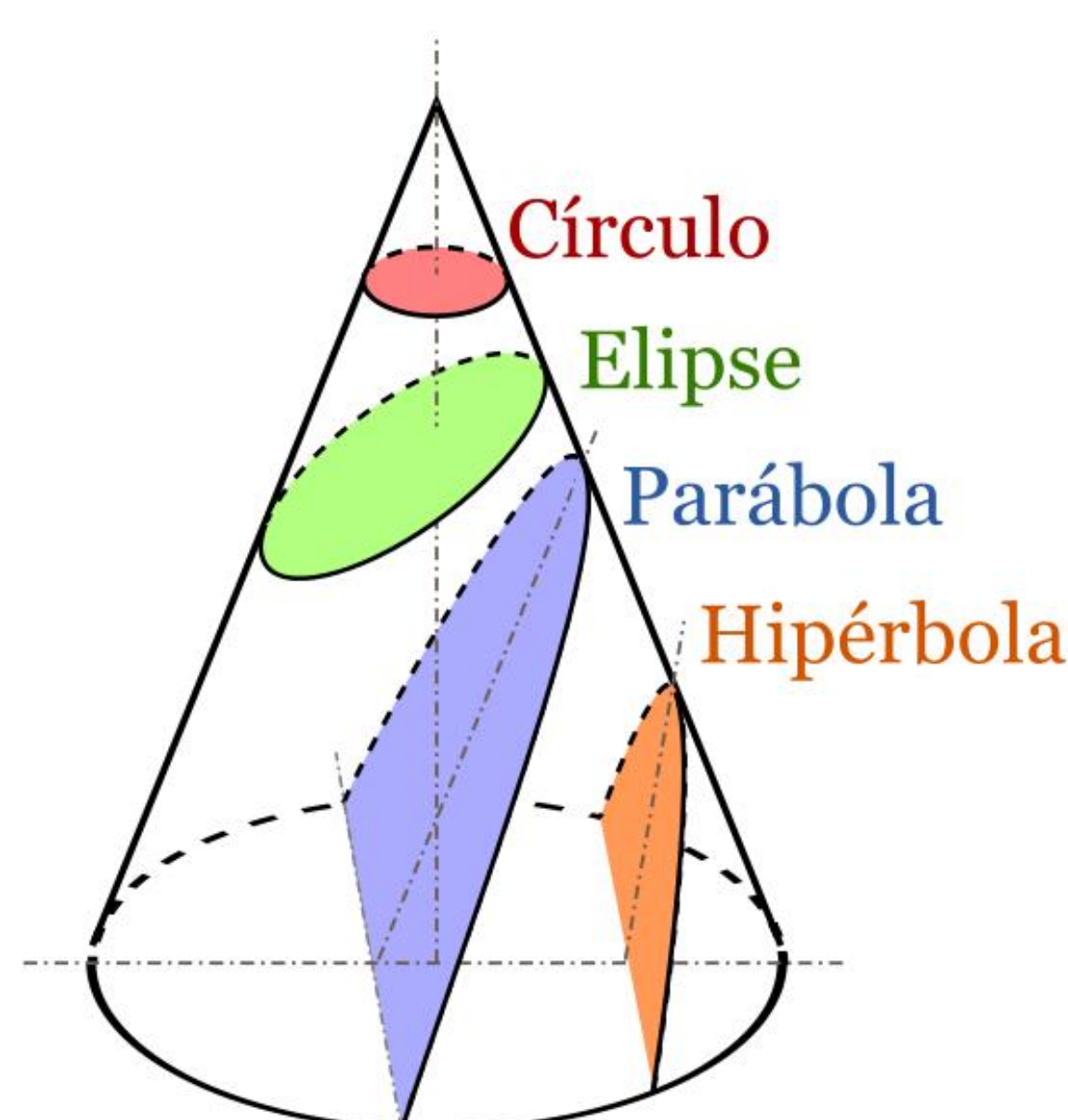


Figura 1: Seções cônicas

Note que um elemento X está no interior do cone, que denominamos \mathcal{C}_{int} , se e somente se $Q(X) < 0$ e X está no exterior do cone, que denominamos \mathcal{C}_{ext} , se e somente se $Q(X) > 0$.

Um cálculo simples mostra que $e^{t\text{ad}(B)}\mathcal{C} = \mathcal{C}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, \mathcal{C} é invariante pelas soluções de (1).

De modo a entender as curvas induzidas em \mathcal{C} consideraremos o funcional linear

$$f_B : \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_B(X) = \langle B, X \rangle.$$

Dado $c \in \mathbb{R}$, temos que

$$B_c^\perp := f_B^{-1}(c) = \{X \in \mathfrak{sl}(2); \langle X, B \rangle = c\}$$

é um plano ortogonal a B^* . Além disso,

$$e^{t\text{ad}(B)}B_c^\perp = B_c^\perp, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e portanto B_c^\perp é também invariante pelas soluções de (1).

A análise de posição relativa de plano e cone nos dá o seguinte:

- $B_c^\perp \cap \mathcal{C}$ é a origem se $c = 0$ ou uma elipse se $c \neq 0$ para $B \in \mathcal{C}_{\text{int}}$;
- $B_c^\perp \cap \mathcal{C}$ é uma reta passando pela origem se $c = 0$ ou uma parábola se $c \neq 0$ para $B \in \mathcal{C}_{\text{int}}$;
- $B_c^\perp \cap \mathcal{C}$ são duas retas se $c = 0$ ou uma hipérbole se $c \neq 0$ para $B \in \mathcal{C}_{\text{int}}$.

Trajetórias no cone

Nessa seção mostraremos que as soluções de (1) restritas ao cone são dadas pelas componentes conexas das interseções $B_c^\perp \cap \mathcal{C}$.

Necessitaremos do seguinte lema:

Lema 1. *Seja $Z \in \mathcal{C}$ e $B \in \mathfrak{sl}(2)$ tal que $\text{ad}(B)Z \neq 0$. Então*

$$\langle Z, B \rangle = 0 \iff \text{ad}(B)Z = \alpha Z, \quad \alpha \neq 0.$$

Demonstração. A demonstração do lema segue direto do fato de que

$$\text{ad}(B)Z \in B_0^\perp \cap Z_0^\perp, \quad \forall Z \in \mathcal{C}, B \in \mathfrak{sl}(2). \quad \square$$

Teorema 1. *Dado $Z \in \mathcal{C}$ e $B \in \mathfrak{sl}(2)$, a órbita $\{e^{t\text{ad}(B)}Z, t \in \mathbb{R}\}$ é dada por:*

- $\{Z\}$, se $\text{ad}(B)Z = 0$;
- A componente conexa de $B_c^\perp \cap \mathcal{C}^*$ que contém Z , se $\text{ad}(B)Z \neq 0$, onde $c = \langle B, Z \rangle$ e $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \setminus \{0\}$.

Demonstração. Se $\text{ad}(B)Z = 0$, segue direto de (2) que a órbita é $\{Z\}$.

Caso contrário dividimos o problema em duas partes, se $\langle Z, B \rangle = 0$, pelo Lema 1 temos que $\text{ad}(B)Z = \alpha Z$, então

$$\{e^{t\text{ad}(B)}Z; t \in \mathbb{R}\} = \{e^{t\alpha}Z, t \in \mathbb{R}\} = \{\lambda Z, \lambda > 0\},$$

que é precisamente a componente conexa de $B_c^\perp \cap \mathcal{C}^*$.

Agora para o caso $\langle Z, B \rangle \neq 0$, notemos que os autovalores de $\text{ad}(B)Z$ são os zeros do polinômio

$$P(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - Q(B)).$$

Consequentemente a órbita $\{e^{t\text{ad}(B)}Z, t \in \mathbb{R}\}$ é uma curva fechada se $B \in \mathcal{C}_{\text{int}}$, e uma curva sem autointersecções, satisfazendo

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|e^{t\text{ad}(B)}Z\| = +\infty, \quad \text{se } B \in \mathcal{C}_{\text{ext}} \cup \mathcal{C},$$

e o resultado segue. \square

Referências

- [1] V. Ayala and L. A. B. San Martín. Controllability of two-dimensional bilinear systems: restricted controls and discrete-time. *Proyecciones, revista de matematica*, 18:208–223, Dezembro 1999.