

1. Conceito Biológico de Homeostase

O conceito de homeostase está relacionado à capacidade de um organismo manter constante alguns parâmetros internos a despeito de variações no ambiente externo [1].

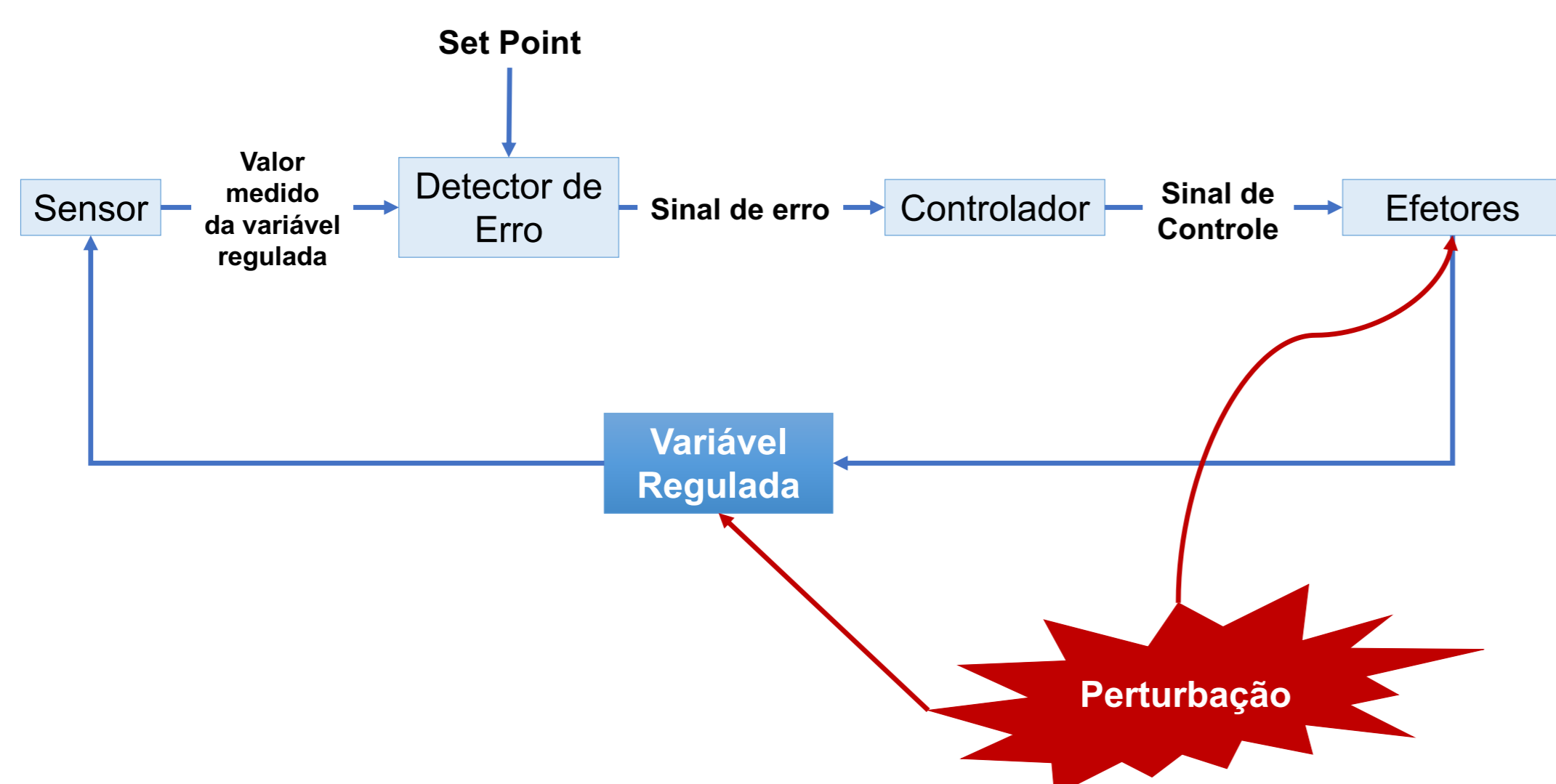


Figura 1: Componentes de um sistema homeostático [1]

Notamos que a temperatura corporal em mamíferos é um exemplo de sistema homeostático, já que a temperatura corporal é mantida razoavelmente constante ao longo de uma faixa de valores de temperatura ambiente. No entanto, para valores extremos de temperatura ambiente, a temperatura corporal varia de maneira significativa [2, 3].

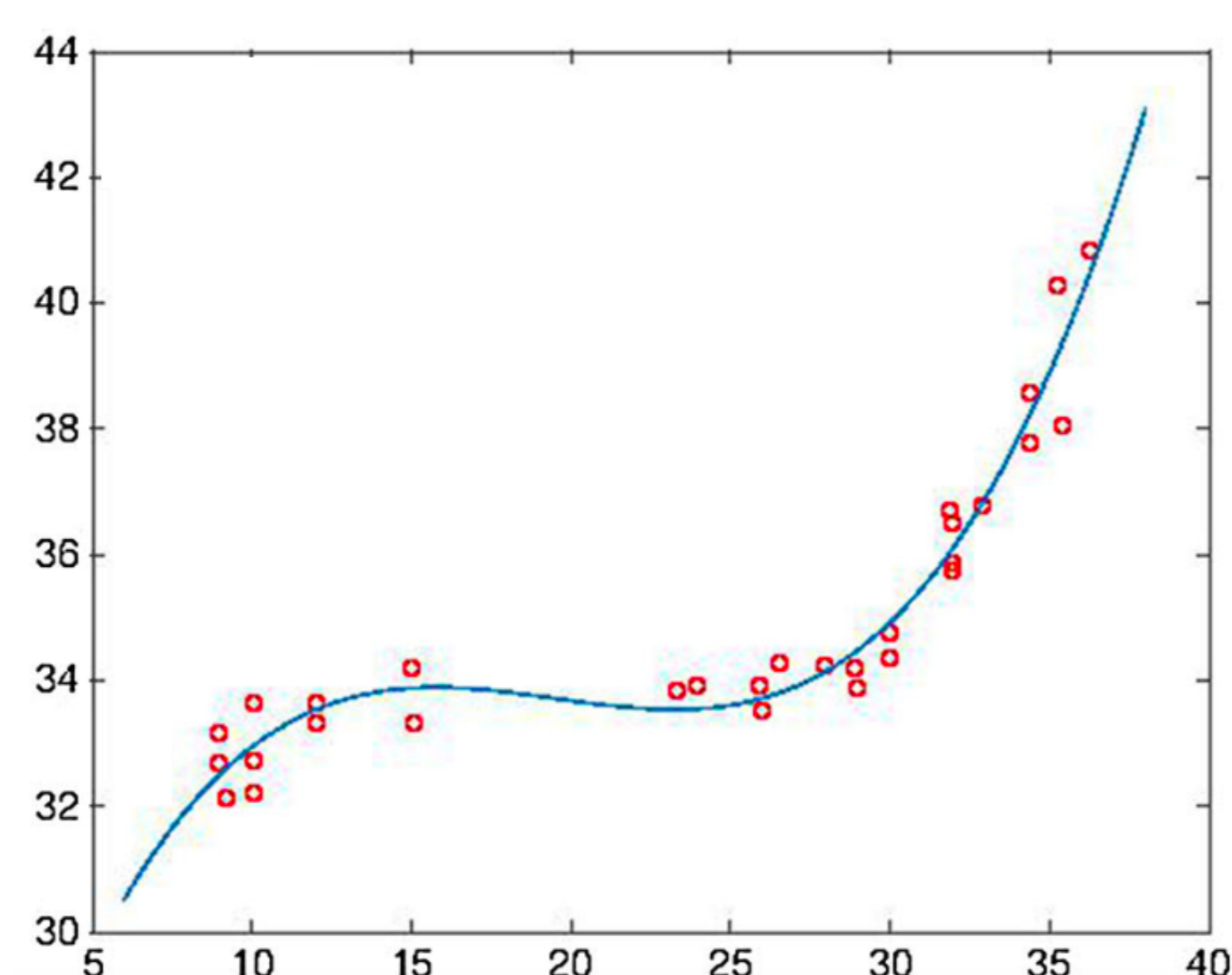


Figura 2: Temperatura corpórea do mamífero *Metachirus nudicaudatus* em função da temperatura ambiente [2, 3].

O gráfico de temperatura do *Metachirus nudicaudatus* pode ser aproximado pelo gráfico de uma função cúbica, como exemplificado na 2.

2. Modelo Matemático de Homeostase

Analisando o sistema biológico do ponto de vista de sistemas dinâmicos, a homeostase seria então o princípio contrário de uma bifurcação [4], pois, a homeostase pressupõe que, frente a uma perturbação suficientemente pequena, além do sistema ter sua estrutura topológica estável, a variável regulada mantém-se quantitativamente constante [4]. A variável regulada pode ser chamada *funções de saída* do sistema, e depende de um ou mais parâmetros externos (os quais podem ou não sofrer a influência da função de saída, os quais são denominados *funções de entrada* [4].

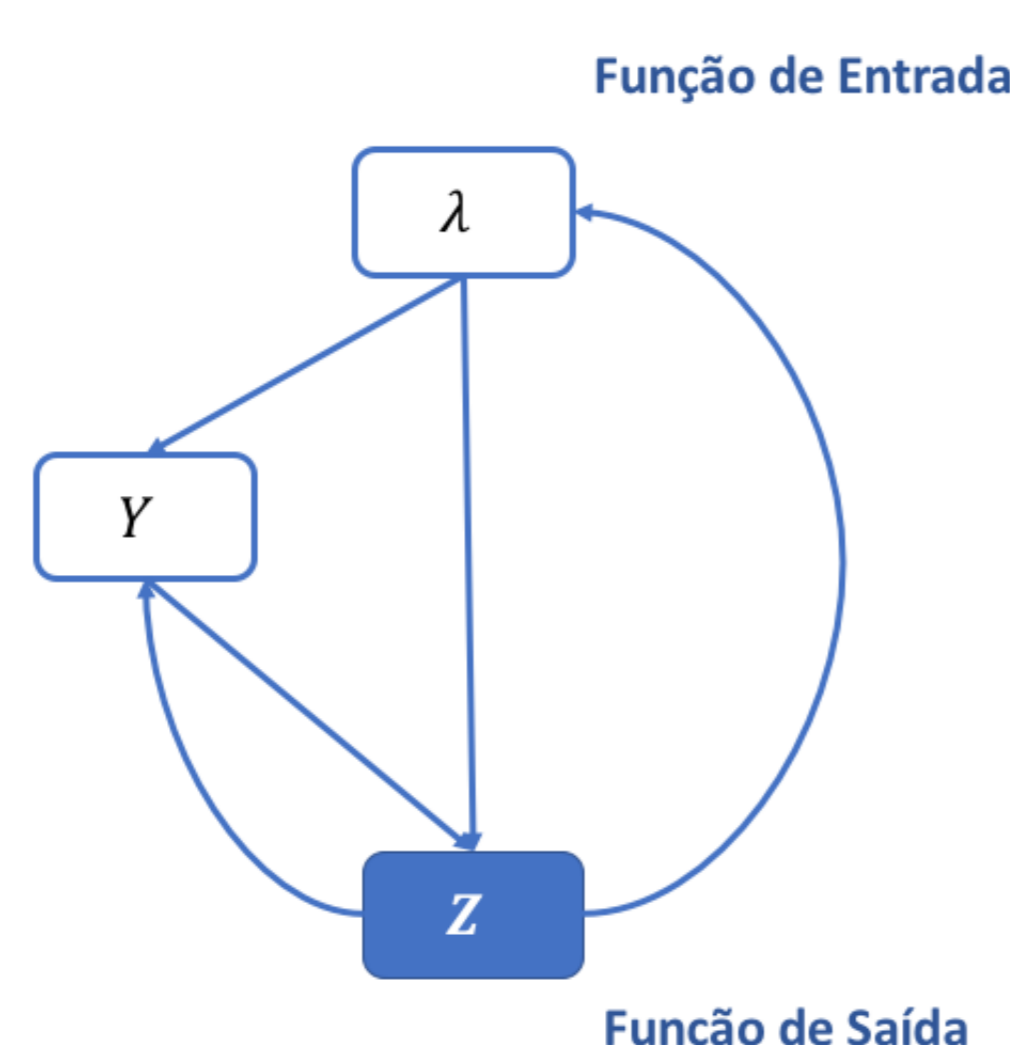


Figura 3: O Sistema X é dividido nas componentes Y e Z , e tem como função de entrada λ .

Consideramos um sistema de EDOs na variável $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Suponhamos que x_n represente a variável regulada do sistema, e portanto a função de saída do mesmo. Renomeando os componentes do sistema como $Y = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ e $Z = x_n$, temos $X = (Y, Z)$.

Definição 1 Considere a família de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{X} = F(X, \lambda) \quad (1)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}^k$ é o parâmetro de entrada do sistema. Suponhamos que (1) tem um equilíbrio linearmente estável em (X_0, λ_0) . Pelo teorema da função implícita, existe em uma vizinhança de λ_0 uma família de equilíbrios linearmente estáveis $\tilde{X}(\lambda)$, com $\tilde{X}(\lambda_0) = X_0$, de tal forma que para todo λ nessa vizinhança temos:

$$\tilde{X}(\lambda) = (\tilde{Y}(\lambda), \tilde{Z}(\lambda)) \Rightarrow F(\tilde{X}(\lambda), \lambda) \equiv 0 \quad (2)$$

- A família de equilíbrios $(\tilde{Y}(\lambda), \tilde{Z}(\lambda))$ exibe *Z-homeostase* em λ_0 se

$$\tilde{Z}_{\lambda}(\lambda_0) = 0 \quad (3)$$

- Se $\tilde{Z}_{\lambda, \lambda}(\lambda_0) \neq 0$, então λ_0 é um ponto de *Z-homeostase simples*

- A família de equilíbrios $(\tilde{Y}(\lambda), \tilde{Z}(\lambda))$ exibe *Z-cadeira* em λ_0 se

$$\tilde{Z}_{\lambda}(\lambda_0) = \tilde{Z}_{\lambda, \lambda}(\lambda_0) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{Z}_{\lambda, \lambda, \lambda}(\lambda_0) \neq 0 \quad (4)$$

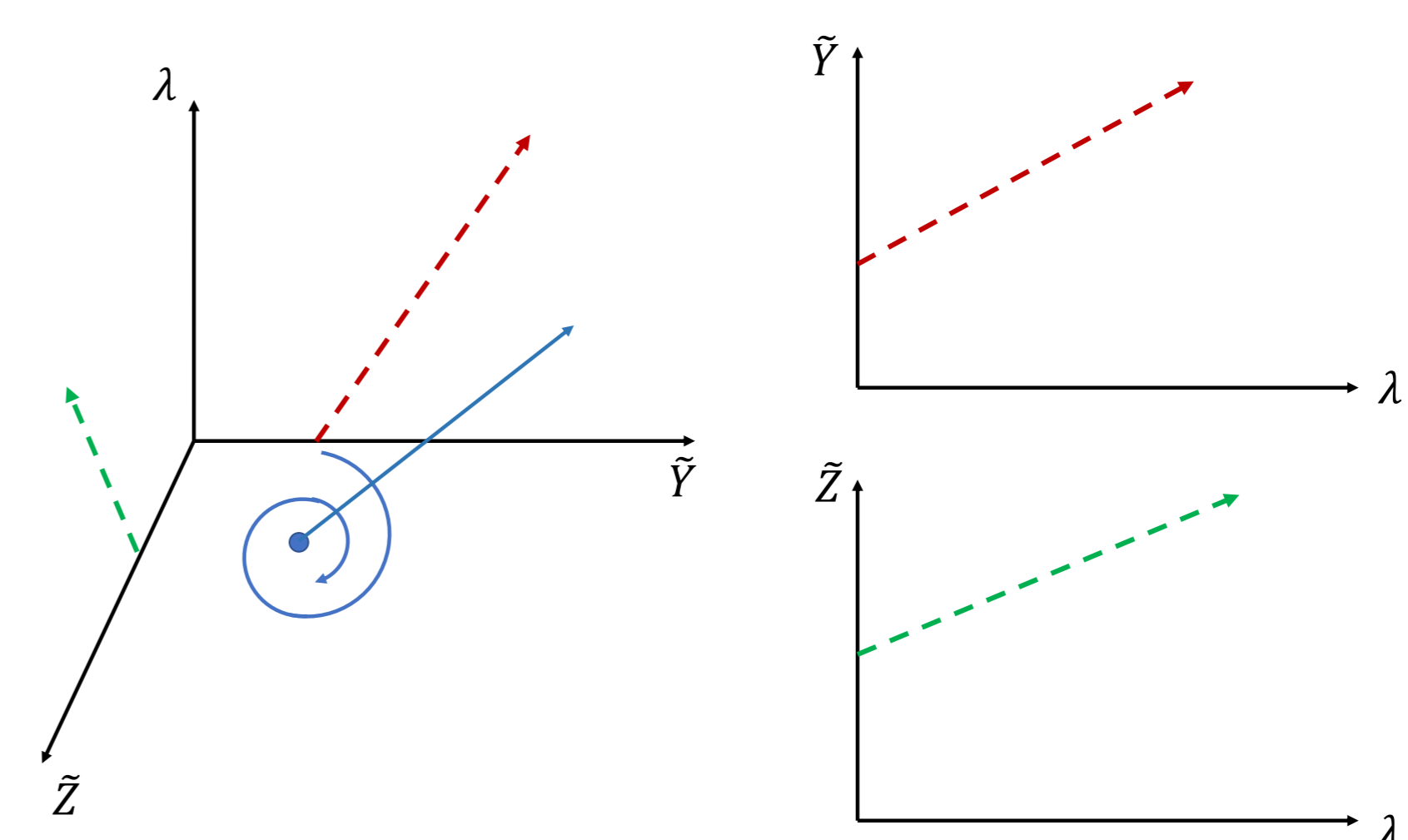


Figura 4: Comportamento de \tilde{X} em relação a λ na ausência de Z -homeostase

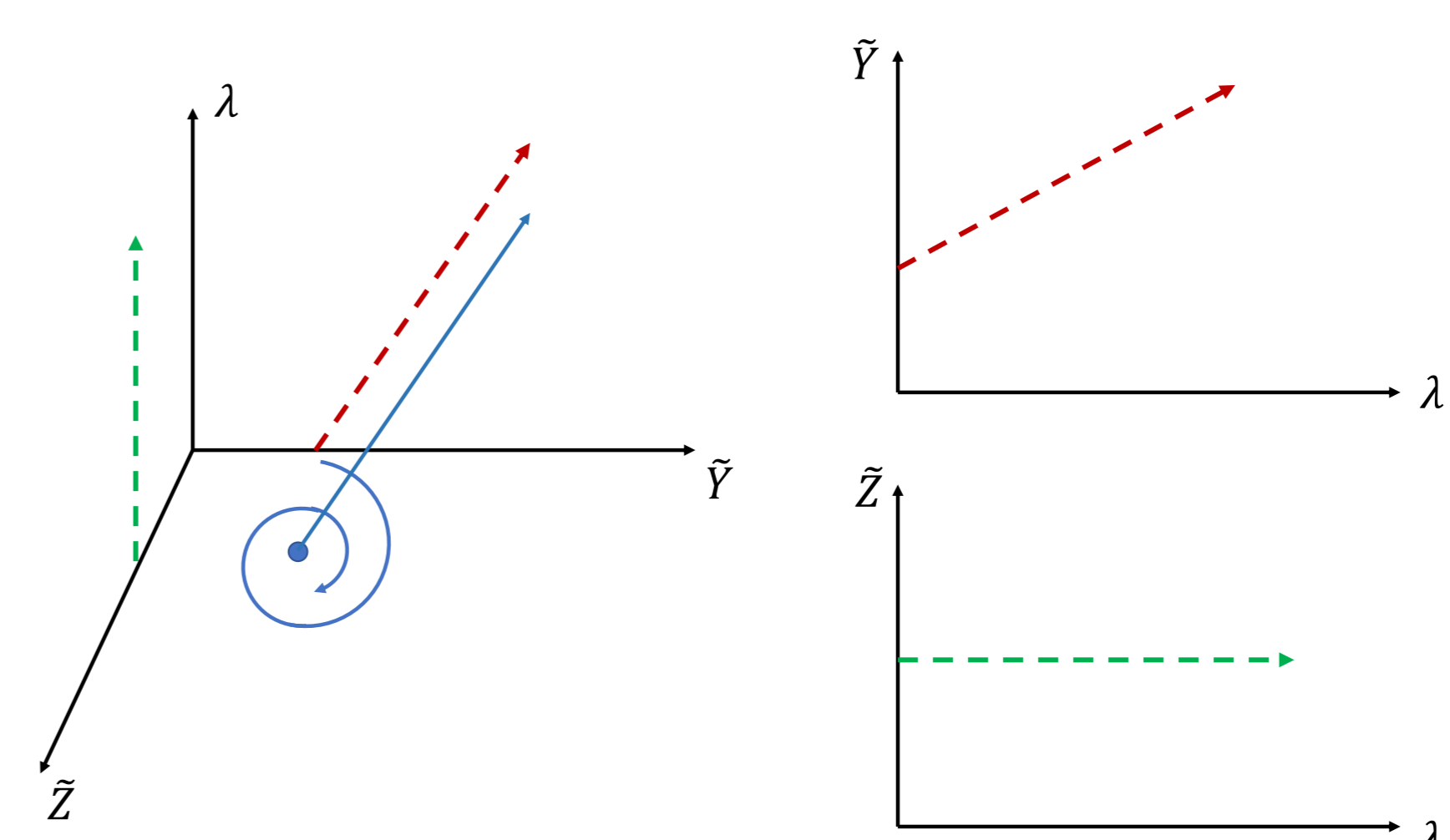


Figura 5: comportamento de \tilde{X} em relação a λ na presença de Z -homeostase

De acordo com a teoria de singularidades, mais especificamente a teoria de catástrofes [4], dada uma função real $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o menor $k \in \mathbb{N}$ tal que $g^{(k)}(0) \neq 0$ determina a *forma normal* de g , dada por $\pm \lambda^k$ e o correspondente *desdobramento universal*:

$$\pm \lambda^2 \text{ se } k = 2 \text{ ou } \pm \lambda^k + a_{k-2}\lambda^{k-2} + a_{k-3}\lambda^{k-3} + \dots + a_1\lambda \text{ se } k \geq 3 \quad (5)$$

Aplicando as equações em (5) e a definição 1, concluímos que:

- Se o sistema exibe homeostase simples, então a forma normal coincide com o desdobramento universal, dados por:

$$\tilde{Z}(\lambda) = \pm \lambda^2 \quad (6)$$

- Se o sistema exibe homeostase do tipo cadeira, então o desdobramento universal de sua forma normal (singularidade de codimensão 1) é dado por:

$$\tilde{Z}_a(\lambda) = \pm \lambda^3 + a\lambda \quad (7)$$

3. Conclusão

A aplicação da teoria de sistemas dinâmicos associada à teoria de singularidades permite a formalização de um fenômeno biológico fundamental: a homeostase.

Referências

- [1] H. Modell, W. Cliff, J. Michael, J. McFarland, M. P. Wenderoth, and A. Wright. A physiologist's view of homeostasis. *Adv Physiol Education*, 39(4):259–66, 2015.
- [2] P. R. Morrison. Temperature regulation in three central american mammals. *J Cell Comp Physiol*, 27:125–137, 1946.
- [3] H. F. Nijhout, J. Best, and M. C. Reed. Escape from homeostasis. *Math Biosci*, 257:104–110, 2014.
- [4] M. Golubitsky and I. Stewart. Homeostasis, singularities, and networks. *J Math Biol*, 74(1-2):387–407, 2017.