# Classificação dos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos de peso irredutíveis


impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

DMAT - UFPR

**João Antonio Francisconi Lubanco Thomé**[1]

**Orientador: Prof. Dr. Matheus Batagini Brito**[2]

Universidade Federal do Paraná

Álgebra e Geometria Algébrica

[1]`jolubanco@gmail.com`, [2] `mbrito@ufpr.br`


## Resumo


*No estudo da álgebra abstrata, muitas vezes é importante e eficiente trabalhar com suas representações. Para o caso particular de álgebras de Lie semi-simples de dimensão finita, a teoria de representação de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ desempenha um papel crucial. Neste trabalho focamos no estudo das representações da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e apresentamos a classificação de todos os seus módulos de peso irredutíveis.*


## 1. Definições e Resultados Preliminares

**Definição.** Seja $\mathfrak{g}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, e defina sobre $\mathfrak{g}$ um produto $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, chamado de colchete. Dizemos que $\mathfrak{g}$ munido do colchete é uma **Álgebra de Lie**, se o colchete satisfazer as seguintes condições:

1. Bilinearidade;
2. Anti-Simetria: $[X, X] = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$;
3. Identidade de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0,$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

**Definição.** A álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ é o espaço vetorial

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{C} \right\},$$

ou seja, todas as matrizes de ordem 2 com traço zero e entradas complexas, munido com o colchete dado por $[x, y] = xy - yx$, para todo $x, y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Note que, como espaço vetorial, os seguintes elementos formam uma base para $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, podemos formar a seguinte tabela a partir da aplicação do colchete nos elementos da base:

| [ , ] | e | f | h |
|---|---|---|---|
| e | 0 | h | -2e |
| f | -h | 0 | 2f |
| h | 2e | -2f | 0 |

**Definição.** Um **módulo** sobre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, ou um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo, é um espaço vetorial $V$ com três operadores lineares fixados, $E$, $F$ e $H$ em $V$, satisfazendo as seguintes relações:

(i) $EF - FE = H$;
(ii) $HE - EH = 2E$;
(iii) $HF - FH = -2F$.

As condições impostas para os operadores $E, F$ e $H$ para definir um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo são análogas às obtidas aplicando o comutador nos elementos da base da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, como foi feito na tabela acima.

**Definição.** Seja $V$ um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo. Um subespaço vetorial $W \subset V$ é dito ser um **submódulo** de $V$ se for invariante pela ação de $E, F$ e $H$, isto é, se satisfazer:

(i) $EW \subset W$;
(ii) $FW \subset W$;
(iii) $HW \subset W$.

**Definição.** Seja $V$ um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ defina

$$V_\lambda = \{v \in V : H(v) = \lambda v\}.$$

O autovalor $\lambda$ é chamado de **peso** de $V$ sempre que $V_\lambda \neq 0$ e o conjunto $V_\lambda$ é subespaço vetorial de $V$ chamado de **espaço de peso** de $V$ de peso $\lambda$. O módulo $V$ é chamado de **módulo de peso** se

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda.$$

Para um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo de peso $V$, definimos o **suporte** de $V$, denotado por $suppV$, como

$$supp(V) = \{\lambda \in \mathbb{C} : V_\lambda \neq 0\}.$$

**Lema.** *Se $\lambda \in \mathbb{C}$, então:*

*(a) $EV_\lambda \subset V_{\lambda+2}$;*
*(b) $FV_\lambda \subset V_{\lambda-2}$;*
*(c) $HV_\lambda \subset V_\lambda$.*

**Definição.** Dados dois $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos $V$ e $W$, um **homomorfismo** de $V$ para $W$ é uma função linear $\Phi : V \to W$ que faz o seguinte diagrama comutar, para todo $X \in \{E, F, H\}$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "X_V"] \arrow[d, "\Phi"'] & V \arrow[d, "\Phi"] \\ W \arrow[r, "X_W"] & W \end{tikzcd}$$

Um homomorfismo bijetor é chamado de **isomorfismo**. Quando dois módulos forem isomorformos utilizaremos a notação $V \cong W$.

**Definição.** Dado um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo de peso $V$, dizemos que $V$ é **irredutível**, ou simples, se seus únicos submódulos são os triviais, isto é, $V$ ou $0$. Um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo $V$ é chamado de **decomponível** se

$$V \cong V_1 \oplus V_2,$$

para algum $V_1$ e $V_2$ $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos não nulos. Quando não é possível obter tal decomposição, dizemos que $V$ é **indecomponível**. Ainda mais, um módulo que é isomorfo a uma soma direta de módulos simples é dito **semissimples**.

Logo, para estudar os módulos semissimples é suficiente estudar os módulos simples. No estudo das representações de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, iremos utilizar dois elementos importantes: o suporte de um módulo e o **operador Casimir** $C$, definido por

$$C = (H + 1)^2 + 4FE \in End(V).$$

O operador de Casimir desempenha um papel fundamental na classificação dos módulos simples devido ao seguinte resultado:

**Lema.** *Seja $V$ um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo. O operador de Casimir age em $V$ como um múltiplo escalar da identidade, ou seja, $C_V = \eta \cdot id_V$, para $\eta \in \mathbb{C}$.*

## 2. Construção de alguns $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos

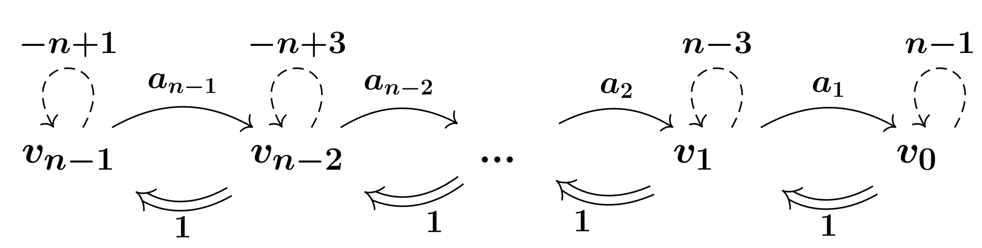
Para realizar a construção das famílias dos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos, definiremos as ações dos operadores $E, F$ e $H$ nos elementos da base do espaço vetorial associado. Para isso, utilizaremos diagramas, onde as setas simples representam as ações de $E$, as setas duplas as ações de $F$ e as setas pontilhadas representam as ações de $H$.

(i) **Módulo** $V^{(n)}$: $n \in \mathbb{N}$.

Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão $n$ e uma base $\{v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$. Definimos as ações dos operadores da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Ev_i &= i(n-i)v_{i-1}; \\ Hv_i &= (n-1-2i)v_i; \\ Fv_i &= v_{i+1}. \end{aligned}$$

Podemos representar tais ações pelo diagrama abaixo, onde $a_i = i(n-i)$:

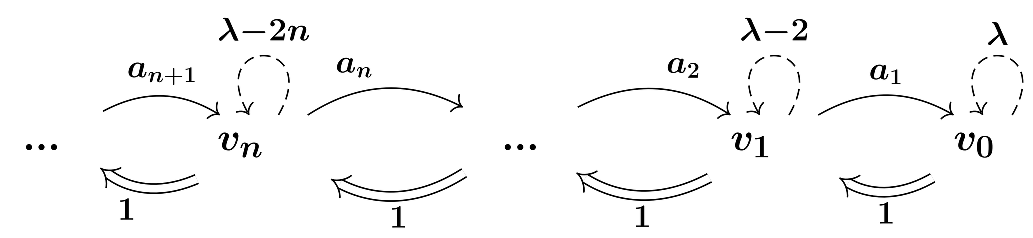



(ii) **Módulo Verma** $M(\lambda)$: $\lambda \in \mathbb{C}$.

Seja $M(\lambda)$ um espaço vetorial cuja base é $\{v_i, i \in \mathbb{N}_0\}$. Definimos as ações dos operadores da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(v_i) &= v_{i+1}; \\ H(v_i) &= (\lambda - 2i)v_i; \\ E(v_i) &= \begin{cases} a_i v_{i-1}, & i \neq 0 \\ 0, & i = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Podemos representar tais ações pelo diagrama a seguir, onde $a_i = i(\lambda - i + 1)$:

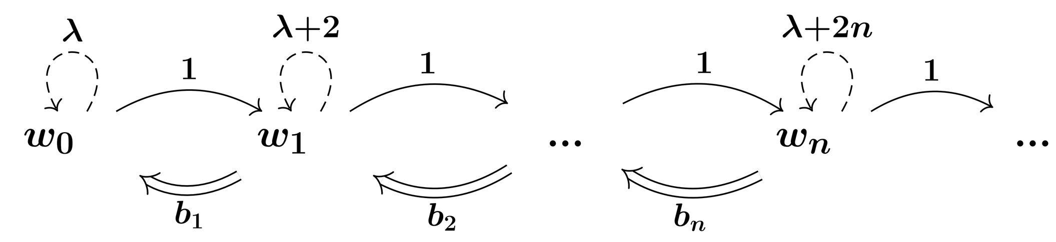



(iii) **Módulo** $\overline{M}(\lambda)$: $\lambda \in \mathbb{C}$.

Seja $\overline{M}(\lambda)$ um espaço vetorial cuja base é $\{w_i, i \in \mathbb{N}_0\}$. Definimos as ações dos operadores da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E(w_i) &= w_{i+1}; \\ H(w_i) &= (\lambda + 2i)w_i; \\ F(w_i) &= \begin{cases} b_i w_{i-1}, & i \neq 0 \\ 0, & i = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Podemos representar tais ações pelo diagrama abaixo, onde $b_i = -i(\lambda + i - 1)$:

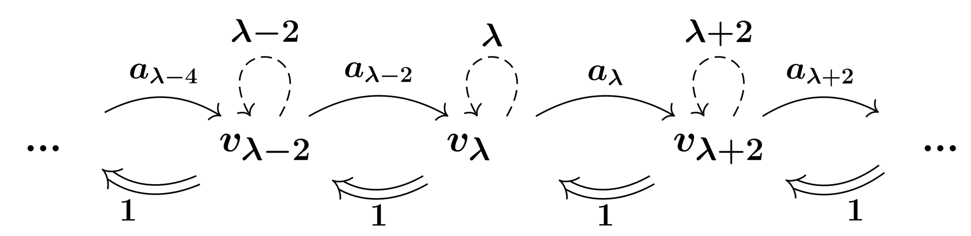



(iv) **Módulo Denso** $V(\xi, \tau)$: $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$ e $\tau \in \mathbb{C}$.

Seja $V(\xi, \tau)$ um espaço vetorial cuja base é $\{v_\mu, \mu \in \xi\}$. Definimos as ações dos operadores da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(v_\mu) &= v_{\mu-2}; \\ H(v_\mu) &= \mu v_\mu; \\ E(v_\mu) &= \frac{1}{4}(\tau - (\mu+1)^2)v_{\mu+2}. \end{aligned}$$

Podemos representar tais ações pelo diagrama abaixo, onde $a_\mu = \frac{1}{4}(\tau - (\mu + 1)^2)$:




## 3. Classificação dos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-Módulos

**Teorema.** *Cada $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo de peso irredutível é isomorfo a um único módulo a seguir:*

*(i) $V^{(n)}$ para algum $n \in \mathbb{N}$;*
*(ii) $M(\lambda)$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}_0$;*
*(iii) $\overline{M}(-\lambda)$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}_0$;*
*(iv) $V(\xi, \tau)$ para algum $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$ e $\tau \in \mathbb{C}$ tal que $\tau \neq (\mu + 1)^2$ para todo $\mu \in \xi$.*

A ideia da demonstração se baseia em estudar as ações dos operadores $E$ e $F$ da seguinte maneira:

- Se $E$ não for injetivo então $V$ pode ser da forma $V^{(n)}$ ou $M(\lambda)$, dependendo da dimensão do módulo $V$;
- Se $F$ não for injeivo, então $V$ pode ser da forma $V^{(n)}$ ou $\overline{M}(\lambda)$, dependendo da dimensão do módulo $V$;
- Se $E$ e $F$ forem injetivos, temos que $V$ é da forma $V(\xi, \tau)$.

## Referências


[1] MAZORCHUK, V. **Lectures on $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-modules**. Imperial College Price, 2009.

[2] SAN MARTIN, L.A.B. **Álgebras de Lie**. 2. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2010.

[3] HUMPHREYS, J.E. **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory**. Third Printing. Springer-Verlag. New York, 1980.