Boa colocação para a equação de ondas longas intermediárias regularizada (rILW)

Janaina Schoeffel [1], Ailín Ruiz de Zárate [2], César J. Niche [3]
Higidio Portillo Oquendo [4], Daniel G. Alfaro Vigo [5]

[1]Setor de Educação Profissional e Tecnológica - UFPR - janainaschoeffel@ufpr.br
[2]Departamento de Matemática - UFPR - ailin@ufpr.br
[3]Departamento de Matemática Aplicada - IM-UFRJ - cniche@im.ufrj.br
[4]Departamento de Matemática - UFPR - higidio@ufpr.br
[5]Departamento de Ciência da Computação - IM-UFRJ - dgalfaro@dcc.ufrj.br

1 Introdução

Apresentam-se neste trabalho os resultados obtidos em [4], que abordam os problemas de boa colocação local e global para a equação de ondas longas intermediárias regularizada (rILW)

$$\eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}(\eta_{xt}) = 0,$$

nos espaços de Sobolev H^s, $s > \frac{1}{2}$.

A equação rILW é um modelo não linear para a evolução de ondas na interface entre dois fluidos com densidades diferentes, $\rho_1 < \rho_2$, onde $\eta(x,t)$ representa o reescalamento do deslocamento da interface. Ambos os fluidos são considerados invíscidos, imiscíveis, incompressíveis e irrotacionais. A espessura imperturbada da camada inferior (h_2) é comparável ao comprimento de onda característico da interface perturbada (L) e é muito maior que a espessura imperturbada da camada superior. Essa configuração corresponde ao regime de águas rasas para a camada superior e ao regime intermediário para a camada inferior. As constantes positivas α e β são pequenas e chamadas parâmetro não linear e parâmetro dispersivo, respectivamente.

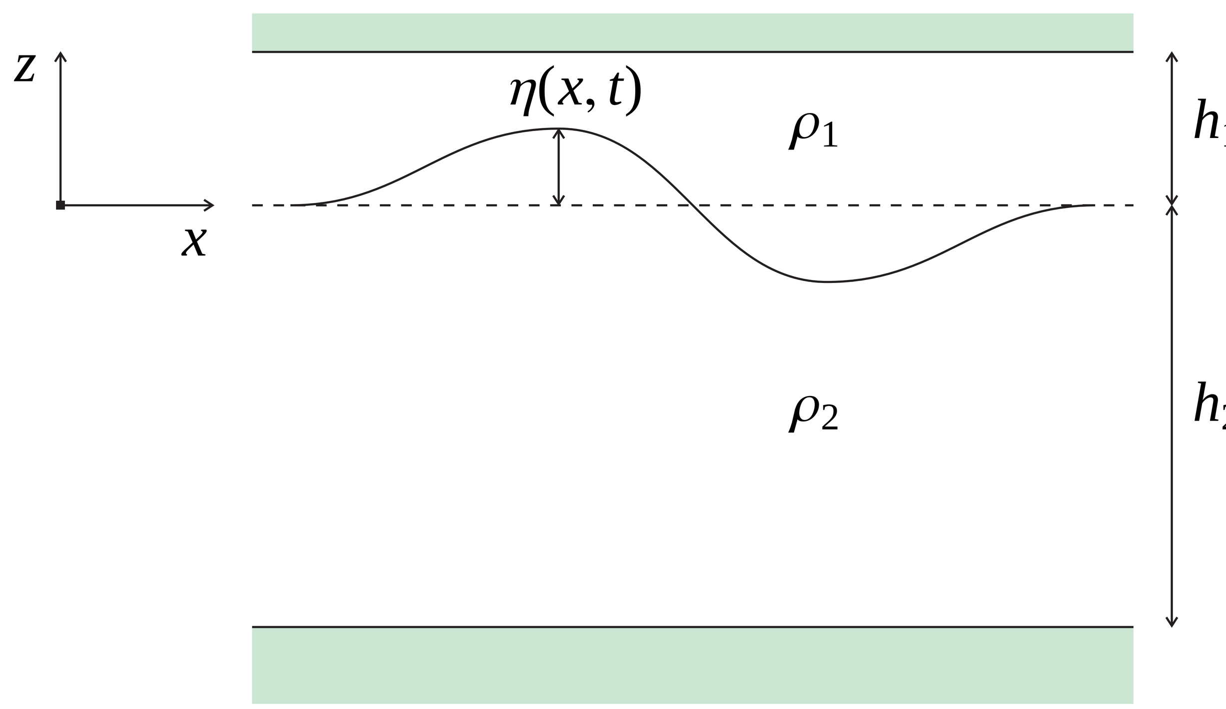

Figura 1: Configuração de um sistema com dois fluidos.

A versão não-regularizada da equação (ILW) foi primeiramente estudada por Joseph em [3].

O operador $\mathcal{T}$, conhecido como *transformada de Hilbert na faixa de espessura* $h = \frac{h_2}{L} > 0$, é definido no domínio da frequência por

$$\widehat{\mathcal{T}f}(k) = i\coth(hk)\widehat{f}(k), \qquad k \in \mathbb{R} \text{ (or } \mathbb{Z}), \; k \neq 0,$$

onde $\widehat{\ }$ indica a transformada de Fourier.

2 Resultados

Seguem abaixo os resultados obtidos para a boa colocação local e global, que são válidos tanto no domínio periódico quanto no não-periódico:

Teorema 2.1. *Sejam $s > \frac{1}{2}$ e $\phi \in H^s$, então existe $T = T(s, \|\phi\|_s) > 0$ tal que o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} \eta \in C([-T,T], H^s) \\ \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}(\eta_{xt}) = 0 \; \in \; H^s \\ \eta(0) = \phi \; \in H^s, \end{cases}$$

é localmente bem-posto.

A existência de solução local é demonstrada a partir do teorema do ponto fixo de Banach e de propriedades do operador $\mathcal{T}$ e do espaço de Sobolev considerado. A desigualdade de Gronwall garante a unicidade de solução e um argumento envolvendo o intervalo maximal de existência leva à continuidade da solução com relação aos dados inciais.

Teorema 2.2. *Sejam $s > \frac{1}{2}$ e $\phi \in H^s$, então o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s) \\ \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_1}\mathcal{T}(\eta_{xt}) = 0 \; \in \; H^s \\ \eta(0) = \phi \; \in H^s, \end{cases}$$

é globalmente bem-posto.

A boa colocação global é obtida combinando o princípio da extensão com uma estimativa global a priori para as soluções locais na norma H^s. A desigualdade do tipo Brezis-Gallouet

$$\|\eta\|_\infty \leq C\left(1 + \sqrt{\log(1 + \|\eta\|_s)}\right)\|\eta\|_{\frac{1}{2}},$$

proposta por Angulo, Scialom e Banquet em [1], é essencial para a obtenção do resultado global.

3 Trabalhos futuros

No artigo de Choi e Camassa, [2], a equação ILW aparece como uma aproximação de baixa ordem $O(\sqrt{\beta})$, para $\alpha = O(\sqrt{\beta})$, no regime unidirecional de propagação para um sistema fracamente não linear. Considerando um sistema análogo, agora com $\alpha = O(\beta)$, obtém-se o resultado abaixo

Teorema 3.1. *Sejam $s > \frac{3}{2}$ e $(\phi, \psi) \in H^{s+1} \times H^{s+1}$ funções a valores reais. Então existe $T_s = T(s, \|\phi\|_{s+1}, \|\psi\|_{s+1}) > 0$ tal que o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} (\eta, u) \in C\left([0, T_s], H^s \times H^{s+1}\right) \\ \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0, \\ u_t + \alpha u\, u_x - \eta_x = b\mathcal{T}[u_{xt}] + a\, u_{xxt}, \\ (\eta(0), u(0)) = (\phi, \psi) \; \in H^{s+1} \times H^{s+1}, \end{cases}$$

possui uma única solução local. Além disso,

$$\forall\, t \in [0, T_s], \qquad (\eta_t(t), u_t(t)) \in H^{s-2} \times H^{s-1}.$$

Atualmente os autores estão trabalhando para melhorar esse resultado, de modo que não haja perda de regularidade na solução.

Agradecimentos

À CAPES, por financiar parcialmente a autora Janaina Schoeffel.

Ao CNPq, por financiar parcialmente o autor César J. Niche.

Referências

[1] J. Angulo, M. Scialom e C. Banquet, *The regularized Benjamin-Ono and BBM equations: Well-posedness and nonlinear stability*, J. Differential Equations, 250, 4011–4036 (2011).

[2] W. Choi e R. Camassa: *Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system.* Journal of Fluid Mechanics, 396: 01-36, 1999.

[3] R.I. Joseph, *Solitary waves in finite depth fluid*, J. Phys. A, 10, L225–L227 (1977).

[4] J. Schoeffel, A. Ruiz de Zarate, H. P. Oquendo, D. G. Alfaro Vigo, C. Niche, *Well-posedness for the regularized intermediate long-wave equation*, Commun. Math. Sci. Forthcoming 2018.