Designing the Radiation Therapy Plan using Interior Point Methods

Jackeline Huaccha & Aurelio Oliveira

Universidade Estadual de Campinas

jacky.157.93@gmail.com

Resumo

O tratamento por radioterapia consiste em usar radiação para eliminar as células do tumor tentando diminuir a radiação nos orgãos e tecidos saudáveis. Neste trabalho, a dosagem é representada por números fuzzy e é usado o método da função surpresa, para melhorar a qualidade da solução, e resolve-se pelo método de pontos interiores primal-dual.

Formulação Matemática

Um problema de radioterapia é:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.a \quad & Ax \leq \tilde{b} \\ & 0 \leq x \leq U \end{aligned} \tag{1}$$

onde A é a matriz de atenuação que representa a intensidade de radiação em que cada sub-feixe é depositado nos píxeis, a variável x representa a dose de cada sub-feixe, $\tilde{b}$ é o vetor de valores de dosagem, cujas coordenadas são números fuzzy.

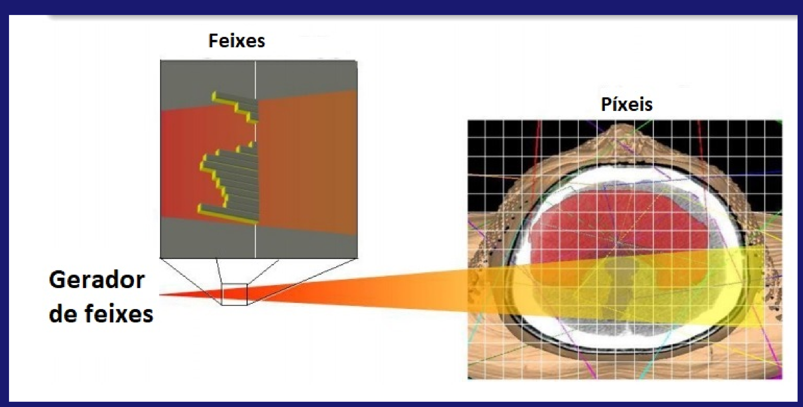

Figura 1: Matriz de atenuação.

Método da Função Surpresa

Em (1), se o oncologista sabe que a transição do tecido saudável às células do tumor é contínua então é usado o método da função surpresa (ver [2]), a função surpresa é definida usando a função de pertinência:

$$s_i(\xi) = \left(\frac{1}{\mu_i(\xi)} - 1 \right)^2 \tag{2}$$

Logo, a formulação da otimização fuzzy usando funções surpresa é:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{TP} s_i \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \right) \tag{3}$$

$$s.a \quad 0 \leq x \leq U$$

Neste trabalho assumimos que os números fuzzy b_i são tringulares (ver Fig. 2)

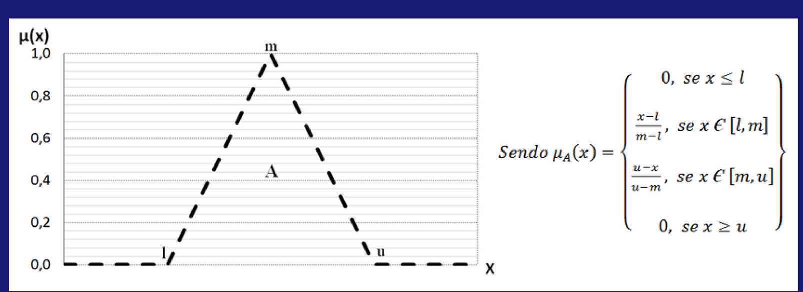

Figura 2: Número fuzzy triangular

Assim,

$$\mu_i(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi_i - b_i^1}{b_i^2 - b_i^1}, & \text{se } \xi_i \in [b_i^1, b_i^2) \\ 1, & \text{se } \xi_i = b_i^2 \\ \frac{b_i^3 - \xi_i}{b_i^3 - b_i^2}, & \text{se } \xi_i \in (b_i^2, b_i^3] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4}$$

Método de Pontos Interiores

O método de pontos interiores é aplicado ao modelo (3)

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.a \quad & 0 \leq x \leq U \end{aligned} \iff \begin{aligned} \min \quad & f(x) - \gamma_x \sum_{i=1}^{N} \ln x_i - \gamma_v \sum_{i=1}^{N} \ln v_i \\ s.a \quad & x - U + v = 0 \end{aligned}$$

A função Lagrangeana é:

$$L(x, v; y) = f(x) - \gamma_x \sum_{i=1}^{N} \ln x_i - \gamma_v \sum_{i=1}^{N} \ln v_i - y^T(x + v - U) \tag{5}$$

Calculando o gradiente da função L e aplicando o método de Newton obtem-se:

$$\begin{pmatrix} H & 0 & -I & -I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & I \\ I & I & 0 & 0 & 0 \\ Z & 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dv \\ dy \\ dz \\ dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z - \nabla f(x) \\ -w - y) \\ U - x - v \\ \gamma_x e X Z e \\ \gamma_v e - V W e \end{pmatrix} \tag{6}$$

onde X e V são as matrizes diagonais formadas pelas componentes de x e v, respectivamente, e H é a matriz Hessiana de f.

(6) é equivalente a resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} (H + V^{-1}W + X^{-1}Z)dx &= r_1 + r_2 + V^{-1}W r_3 + X^{-1} r_4 - V^{-1} r_5 \\ dv &= r_3 - dx \\ dw &= V^{-1}(r_5 - W dv) \\ dz &= X^{-1}(r_4 - Z dx) \\ dy &= r_2 - dw \end{aligned}$$

As componentes da matriz H são:

$$H_{pk} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_p \partial x_k} = 2 \left[\sum_{\xi_i \in [b_i^1, b_i^2)} M_i \frac{a_{ik} a_{ip}}{(b_i^2 - b_i^1)^2} + \sum_{\xi_i \in (b_i^2, b_i^3]} M_i \frac{a_{ik} a_{ip}}{(b_i^3 - b_i^2)^2} \right] \tag{7}$$

onde

$$M_i = 3\mu_i(\xi_i)^{-4} - 2\mu_i(\xi_i)^{-3}$$

Como $a_{ij} \in [0, 1]$, $\forall i, j$ e $M_i \geq 0$ então $H_{pk} \geq 0$, esses valores vão depender do ponto x.

Próximos Passos:

- Analisaremos as propriedades da matriz H para melhorar a eficiência do algoritmo e qualidade da solução.
- Serão feitos testes numéricos com problemas reais, que podem conter milhões de variáveis.

Referências

[1] W. A. Lodwick and K. A. Backman. Solving large-scale fuzzy and possibilistic optimization problems. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 4:257–278, 2005.

[2] A. Neumeier. Fuzzy modelling in terms of surprise. *Fuzzy Sets and Systems*, 135(1):21–38, 2003.

Agradecimentos

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.