Retratos de Fase Bidimensionais

Iury Resende Shirabiyoshi

Universidade Federal de Uberlândia

iuryresende2009@hotmail.com

Resumo

São definidos um sistema de equações diferenciais de primeira ordem e o que é sua solução. Posteriormente são apresentados o conceito de fluxos lineares e as possíveis configurações geométricas para os sistemas bidimensionais simples.

Introdução

Seja I um intervalo de a_{ij}, b_j de funções contínuas em I, com valores reais ou complexos, $i, j = 1, 2, ..., n$, que é denotado abreviadamente por:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_i(t) \tag{1}$$

Uma família de funções reais ou complexas $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$de classe C^1 num intervalo $I_0 \subset I$, chama-se solução do sistema (1) em I_0 se $\forall t \in I_0 \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = x_i'$.

Na equação matricial:

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{2}$$

Se $b_i(t) = 0$, tem-se um sistema linear homogêneo $x' = A.x$ que está **associada ao campo vetorial** definido pela aplicação linear $x \to A(t)x$. Em particular, para $n = 1$ e $A = a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, temos $\phi(t) = e^{at}$.

Teorema: Para todo $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{E}$ existe um única solução $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ de (2) definida em I tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

Fluxos Lineares: Uma aplicação $\varphi : \mathbb{R}x\mathbb{E} \to \mathbb{E}$ de classe C^1 é dita um **fluxo** se $\varphi(0, x) = x$ e $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$. Se para cada $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ for uma apliação linear em $\mathbb{E}$, então o fluxo se chama **linear** e existe uma única matriz A tal que

$$\varphi_t(x) = e^{tA}x$$

Proposição: Seja a matriz A de ordem n com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ relacionados aos autovetores $v_1, v_2, ..., v_n$. A matriz $V(t)$, cuja i-ésima coluna corresponde à solução $\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t}v_i$ é uma matriz fundamental de $x' = Ax$.

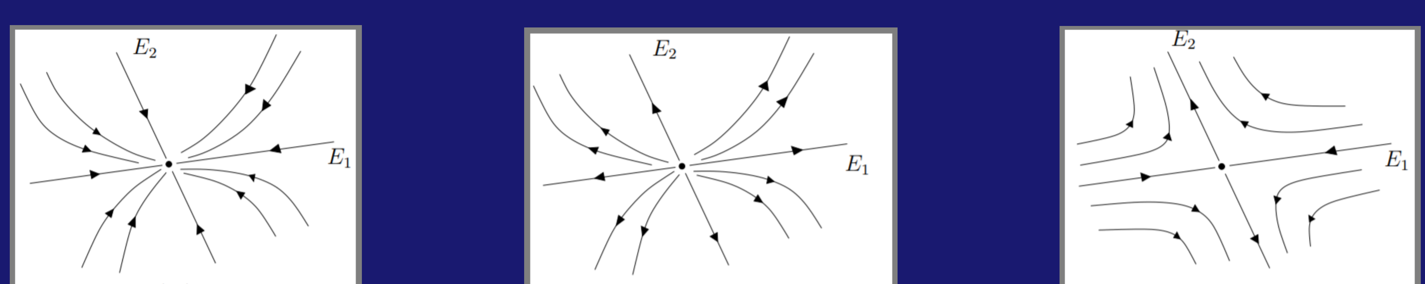
Sistemas Bidimensionais Simples

Considerando A com dimensão 2 e não singular (a origem $0 \in \mathbb{R}$ é o único ponto fixo do fluxo linear). O polinômio característico de A é $\lambda^2 - (tracoA)\lambda + det(A)$, com

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{tracoA \pm \sqrt{(tracoA)^2 - 4det(A)}}{2} \tag{3}$$

Com isso **é possível determinar as configurações geométricas possíveis das soluções de sistemas lineares bidimensionais simples**:

Caso A (autovalores reais, distintos e não nulos): A solução de $x' = Ax$ se escreve como $\varphi(t) = c_1e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2e^{\lambda_2 t}v_2$. Pode-se ter **nó atrator** ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$), **nó instável/fonte** ($\lambda_2 > \lambda_1 > 0$) e **sela** ($\lambda_2 > 0 > \lambda_1$).



(a_1) nó atrator (a_2) nó instável (fonte) (a_3) sela

Caso B (autovalores são complexos conjugados): Se o autovalor $\lambda = \alpha + i\beta$ é associado ao autovetor $v = v_1 + iv_2$, então $\bar{v} = v_1 - iv_2$ é um autovetor associado a um autovalor $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Pela proposição, $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ e $\bar{\varphi(t)} = e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}$ são soluções linearmente independentes de $x' = Ax$. Logo, para dimensão 2

$$\varphi_1(t) = \tfrac{1}{2}[\varphi(t) + \bar{\varphi(t)}] \text{ e } \varphi_2(t) = \tfrac{1}{2i}[\varphi(t) - \bar{\varphi(t)}]$$

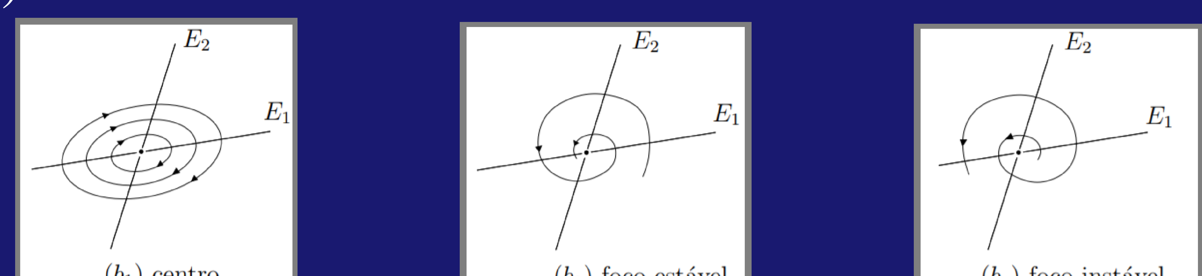
é uma base de soluções de $x' = Ax$. Reescrevendo

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t}[cos(\beta t)v_1 - sen(\beta t)v_2] = Re[\varphi(t)]$$
$$\varphi_2(t) = e^{\alpha t}[sen(\beta t)v_1 + cos(\beta t)v_2] = Im[\varphi(t)]$$

Tomando $c_1 = \rho.cos(\omega)$ e $c_2 = \rho.sen(\omega)$ em $\varphi(t) = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$

$$\varphi(t) = e^{\alpha t}\rho[cos(\omega - \beta t)v_1 + sen(\omega - \beta t)v_2]$$

Pode-se ter **centro** ($\alpha = 0$), **foco atrator** ($\alpha < 0$) e **foco instável** ($\alpha > 0$).



(b_1) centro (b_2) foco estável (b_3) foco instável

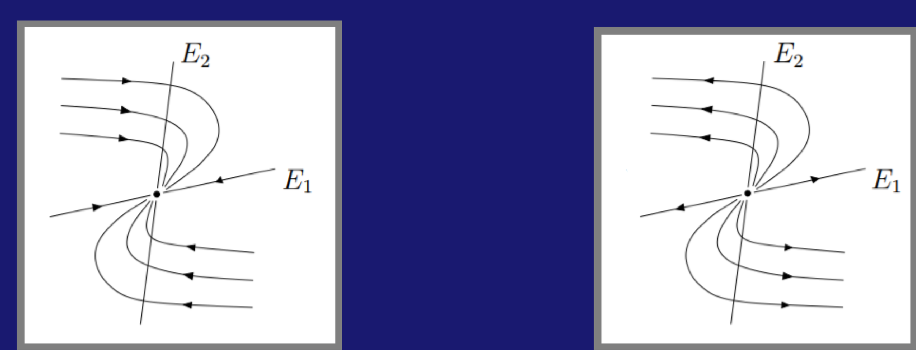
Caso C (autovalores são reais, iguais e não nulos): Se para um dado autovalor λ, há dois autovetores associados v_1, v_2 linearmente independetes,

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}(c_1v_1 + c_2v_2)$$

$\lambda < 0$ $\lambda > 0$

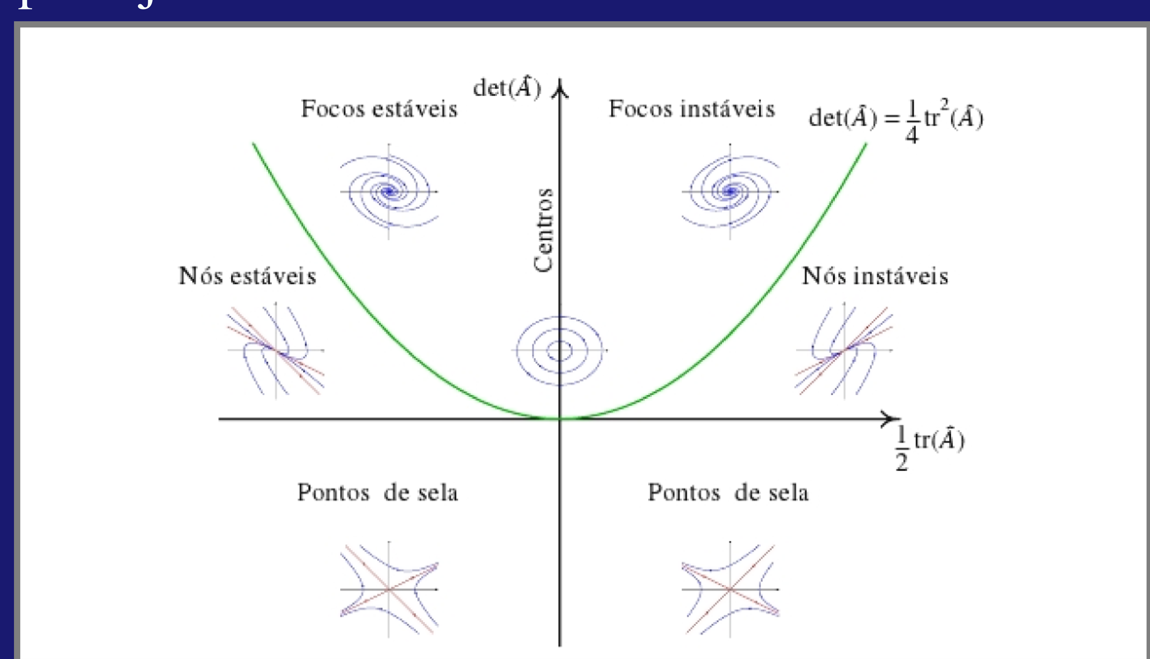
Quando um autovalor de multiplicidade algébrica 2 tem apenas 1 autovetor independente associado, deve-se investigar soluções de outras formas além da exponencial. Para tal situação

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}[(c_1 + tc_2)v_1 + c_2v_2]$$



Conclusão

Apenas uma ideia qualitativa do comportamento do fenômeno dinâmico pode já bastar e é esse o trunfo dos retratos de fase.



Referências

[1] MONTEIRO, L. H. A. , *Sistemas dinâmicos. 2ª ed.*, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

[2] SOTOMAYOR, J. , *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto euclides: IMPA-RJ, 1979.