Estratificação Dos Números Inteiros Via Fractais de Sierpinski

Isaac Victor Silva Rodrigues, Lúcia Maria dos Santos Pinto e Juscelino Bezerra dos Santos

Escola Nacional de Ciências Estatísticas
Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

XXXII Colóquio Brasileiro de Matemática

Resumo

A Estratificação Visual dos Números Inteiros via Fractais de Sierpinski foi inspirada na Espiral de Ulam, uma forma geométrica de apresentação de números primos. A grande vantagem da presente estrutura está no fato de estratificar os números em classes residuais via relações de congruências em $\mathbb{Z}$.

Fractais de Sierpinski

Fractais de Sierpinski são exemplos de fractais que podem ser construídos a partir de polígonos regulares. O mais conhecido deles, o Triângulo de Sierpinski, pode ser construído a partir de um triângulo equilátero no nível 0, conforme Figura 1. Em sua confecção, uma mudança de nível ocorre quando recobrimos o triângulo original com quatro contrações do nível anterior e removemos a central. Este processo ocorre indefinidamente. De forma similar podemos construir fractais a partir de outros polígonos. Na Figura 2 temos o exemplo de um processo de construção de um fractal a partir de um hexágono regular. Este fractal é conhecido como Hexágono de Sierpinsk ou 6-gon.

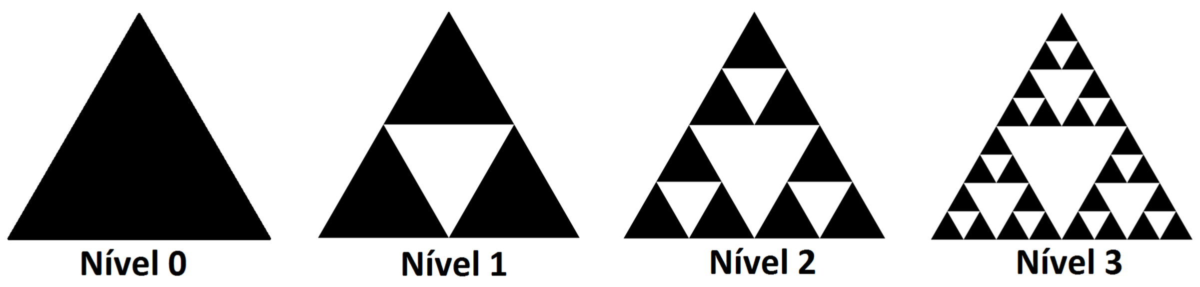

Figura 1: Construção do triângulo de Sierpinski.

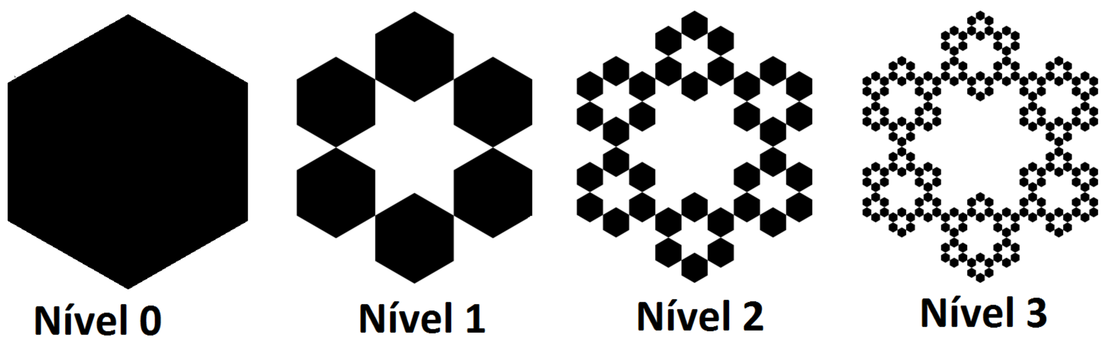

Figura 2: Construção do hexágono de Sierpinski.

Enumerando os Pontos

Computacionalmente para construir um fractal de Sierpinski sempre estaremos limitados a um número finito de níveis. O que pretendemos é enumerar os baricentros dos polígonos do último nível de construção. Na Figura 3 apresentamos um 6-gon construído até o nível 3 onde estão identificadas posições com cores diferentes que a enumeração deverá seguir. Com estas posições começando a partir do zero nos três níveis. Desta forma podemos identificar qualquer x da enumeração pela seguinte expressão: $x = a_0 \cdot 6^0 + a_1 \cdot 6^1 + a_2 \cdot 6^2$. A Figura 3 ilustra este procedimento destacando $x = 70$. Neste caso $x = 70$ coincide com as posições: $(a_2, a_1, a_0) = (1, 5, 4)$

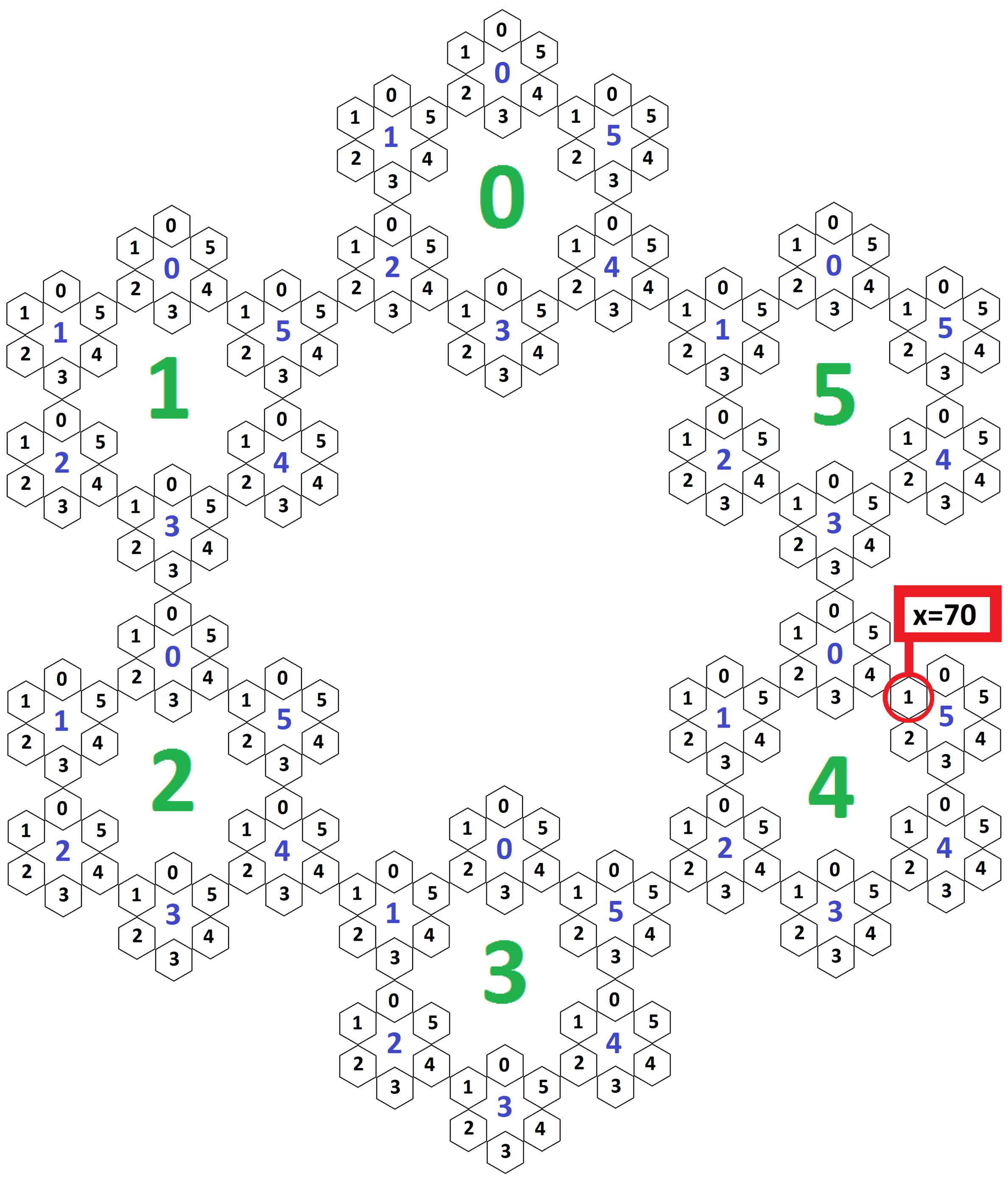

Figura 3: Ordem de enumeração começando pelo topo no sentido anti horário.

Estratos como Classes Residuais

- Teorema: Na enumeração utilizada cada estrato do n-gon coincide com uma classe de congruência de inteiros $\mod n$.

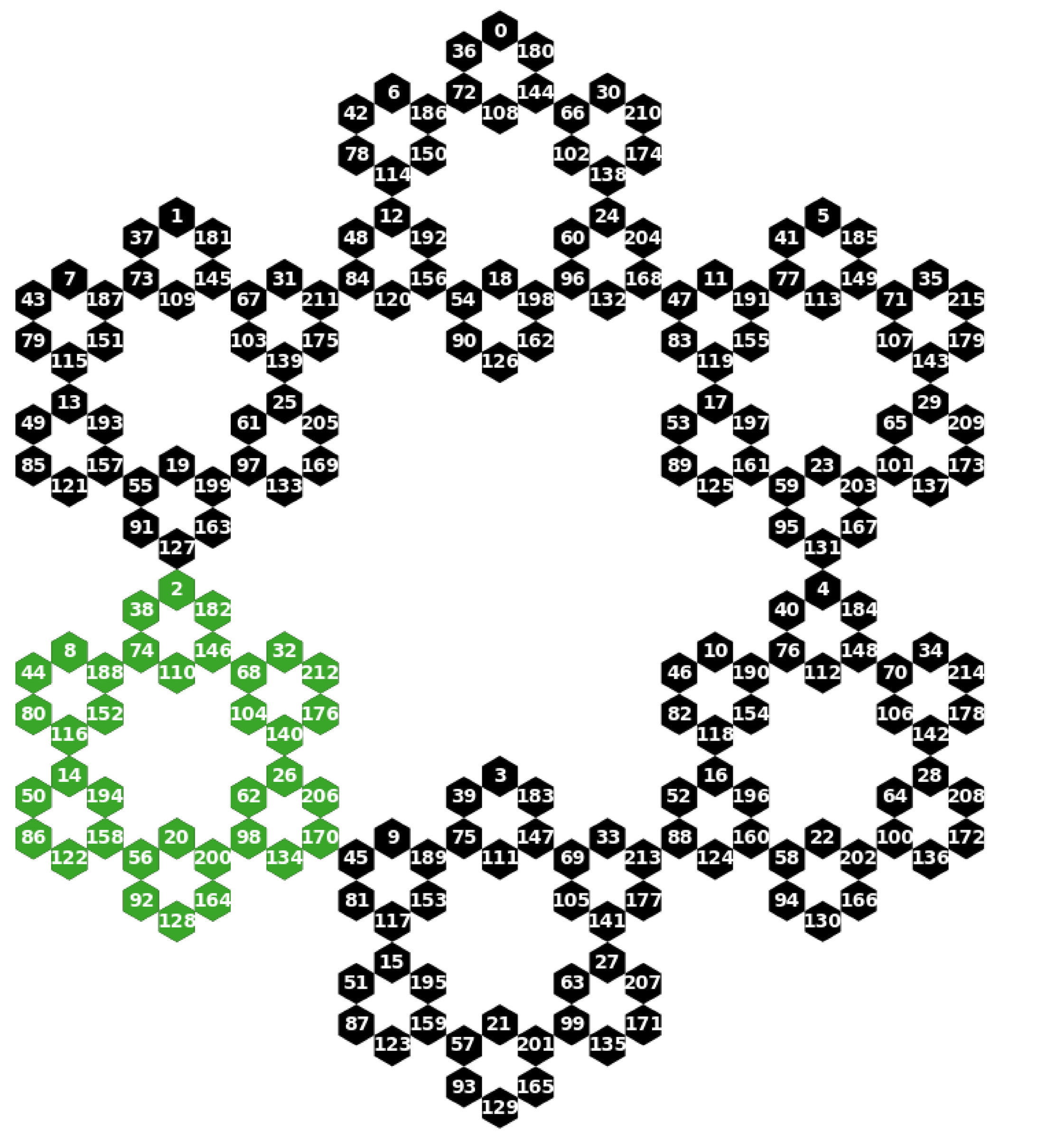

Figura 4: Destacados em verde estão os inteiros congruentes a $2 \mod 6$.

Números Primos

Na Figura 5 pintamos de vermelho os números primos e observamos que, exceto pelo 2 e 3, todos os primos se encontram alocados em dois estratos de tamanho 2 específicos. Esta característica é uma consequência do teorema anterior.

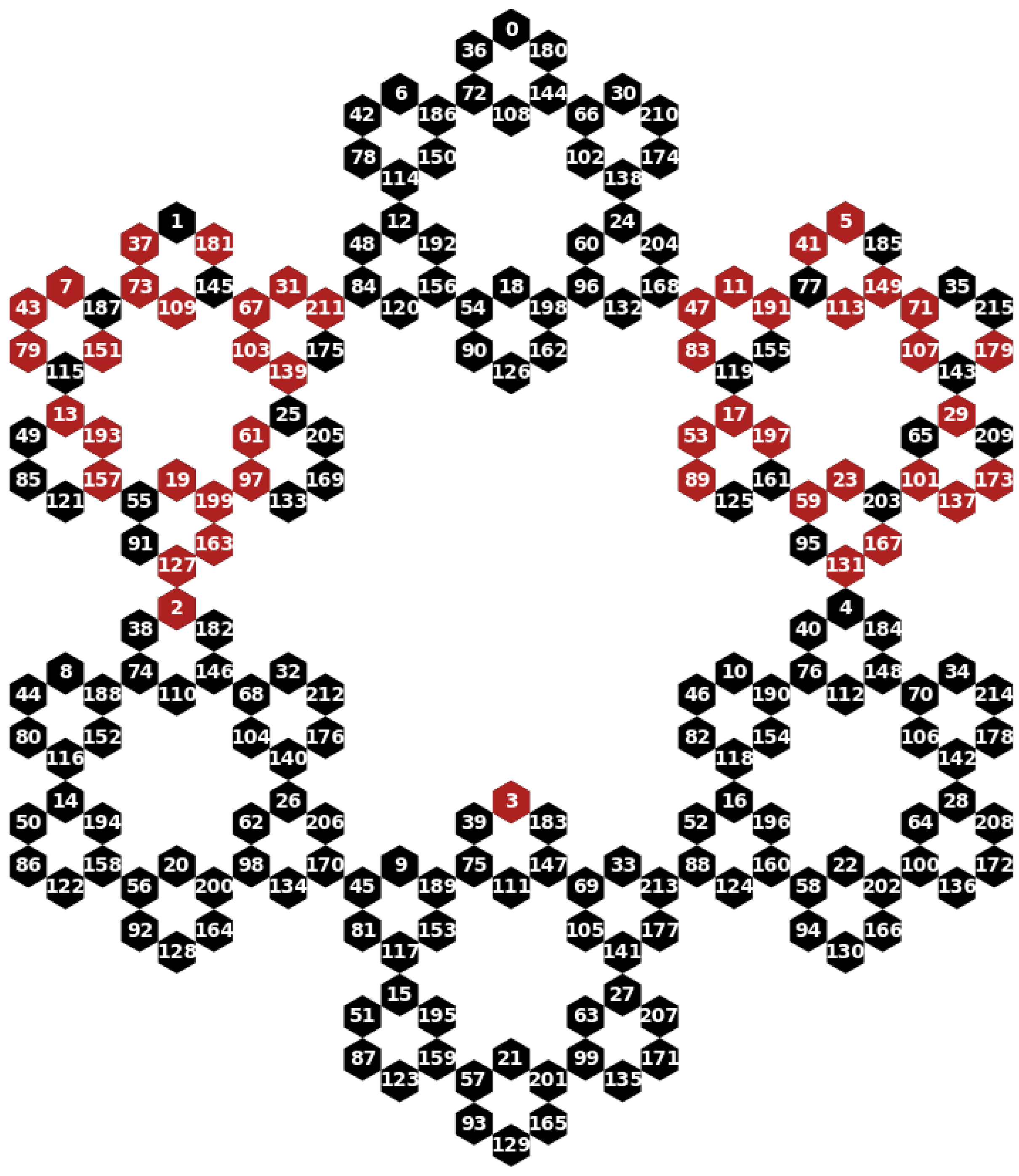

Figura 5: Primos em vermelho.

Conclusões

Além dos resultados já citados a enumeração escolhida pode conduzir a interessantes interpretações visuais de outros resultados da teoria dos números. Podemos citar por exemplo, a equidistribuição dos números primos em classes residuais de inteiros módulo n. Pensando em outros resultados que podem ser explorados por meio desta representação visual, foi desenvolvido um programa executável para Windows 32 ou 64 bits. Tal programa utiliza a enumeração proposta com o objetivo de se estudar diferentes sequências de números inteiros em diferentes n-gons. Tais executáveis podem ser baixados aqui: `https://tinyurl.com/ybcx8n8d`.

isaacvictor@fisica.if.uff.br