Semigrupos numéricos: Aritmética e Geometria

Gilberto B. de Almeida Filho

Universidade Estadual de campinas

g211293@dac.unicamp.br

Resumo

Para $g \in \mathbb{N}_0$, definimos $\mathcal{S}(g)$ a família de semigrupos numéricos de gênero g e $n_g = \sharp\mathcal{S}(g)$. Misteriosamente, n_g se comporta assintoticamente como ϕ^g, onde ϕ é o número de ouro. Isto foi conjecturado por M. Bras-Amorós e foi provado por A. Zhai. Uma outra conjectura feita por ela que ainda está aberta é se $n_{g+1} > n_g$, para todo g.

Introdução

Em 2008, após calcular o número n_g para g até 50, Maria B. conjecturou certos comportamentos acerca desta sequência. Uma delas seria sobre sua monotonicidade, que ainda está em aberto. Estudos sobre este aspecto tem sido abordados de maneiras distintas, como por exemplo, contar semigrupos através do gênero e multiplicidade ou através da contagem de lacunas pares.

Objetivos

1. Apresentar definições e resultados básicos da teoria de semigrupos numéricos.
2. Exibir dois métodos utilizados para contar semigrupos numéricos.
3. Exibir o Resultado principal, Teorema 8.

Definições e notações

- Um subconjunto S de $\mathbb{N}_0$ é dito um semigrupo numérico se S é um submonoide de $\mathbb{N}_0$ com respeito a soma e se $\mathbb{N}_0 \backslash S$ é finito.
- $\mathbb{N}_0 \backslash S = G(S) = \{l_1 < ... < l_g\}$ é o conjuntos da lacunas de S;
- $g = g(S) = \sharp G(S)$ é o gênero de S;
- $m(S) = min\{x \in S \mid x \neq 0\}$ é chamado de multiplicidade de S.
- Dados $S \in \mathcal{S}(g)$. Podemos definir

  $$G_2(S) := \{l \in G(S) \mid l \equiv 0\, mod(2)\} \text{ e } \gamma_2(S) = \sharp G_2(S).$$

  Dizemos que S é $\gamma-$hipereliptico se $\gamma_2(S) = \gamma$.
- Definimos também $\mathcal{S}_\gamma(g) = \{S \in \mathcal{S}(g) \mid \gamma_2(S) = \gamma\}$.
- $N_\gamma := \sharp\mathcal{S}_\gamma(g)$.

Resultados

Lema 1. *Se $S \in \mathcal{S}(g)$, então $G(S) \subset [1, 2g-1]$. Em particular, $n_g \leq \binom{2g-1}{g}$.*

Teorema 2. *Sejam S semigrupo numérico de gênero $g > 1$ e multiplicidade m. Então $2 \leq m \leq g+1$.*

Teorema 3. *Seja (n_g) a sequência de número de semigrupos numéricos de gênero g. Então*

$$\lim_{g \to \infty} \frac{n_g}{\phi^g} = L,$$

onde L e uma constante maior que $3,78$.

Teorema 4. *Suponha que $2g < 3m$. Então $N(m-1, g-1) + N(m-1, g-2) = N(m, g)$.*

Teorema 5. *$N(m, g)$ é exatamente o número de composições de $m-1$ números não negativos $\{k_1, ..., k_{m-1}\}$ tais que $g = \sum k_i$.*

Teorema 6. *Seja $S \in \mathcal{S}_\gamma(g)$. Então*

$$2g \geq 3\gamma.$$

Desta forma, temos a seguinte decomposição $\mathcal{S}(g) = \bigcup_{\gamma=0}^{\lfloor \frac{2g}{3} \rfloor} \mathcal{S}_\gamma(g)$ e $n_g = \sum_{\gamma=0}^{\lfloor \frac{2g}{3} \rfloor} N_\gamma(g)$.

Dado $t \in \mathbb{Z}$, a $t-$translação de um semigrupo numérico S é definida por $\Phi : S \to \mathbb{Z}$ onde $\Phi(s) = s$ se s é par e $\Phi(s) = s - 2t$ caso contrário.

Teorema 7. *Sejam $S \in \mathcal{S}_\gamma(g)$ e $t = g - 3\gamma$. Então $\Phi(S) \in \mathcal{S}_\gamma(3\gamma)$.*

Teorema 8. *Se $g \geq 3\gamma$, então $N_\gamma(g) = N_\gamma(3\gamma)$.*

Segue que $n_g \leq n_{g+1} \Leftrightarrow \sum_{\gamma=\lfloor \frac{g}{3} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{2g}{3} \rfloor} N_\gamma(g) \leq \sum_{\gamma=\lfloor \frac{g}{3} \rfloor+1}^{\lfloor \frac{2g+2}{3} \rfloor} N_\gamma(g+1).$

$g \backslash \gamma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	n_g
0	**1**																	1
1	1																	1
2	1	1																2
3	1	**2**	1															4
4	1	2	4															7
5	1	2	6	3														12
6	1	2	**7**	12	1													23
7	1	2	7	19	10													39
8	1	2	7	21	32	4												67
9	1	2	7	**23**	51	33	1											118
10	1	2	7	23	62	91	18											204
11	1	2	7	23	65	142	98	5										343
12	1	2	7	23	**68**	174	257	59	1									592
13	1	2	7	23	68	192	412	271	25									1001
14	1	2	7	23	68	197	514	678	197	6								1693
15	1	2	7	23	68	**200**	570	1100	793	92	1							2857
16	1	2	7	23	68	200	602	1409	1855	606	33							4806
17	1	2	7	23	68	200	609	1595	2999	2191	343	7						8045
18	1	2	7	23	68	200	**615**	1693	3890	4993	1836	138	1					13467
19	1	2	7	23	68	200	615	1744	4472	8126	6033	1130	43					22464
20	1	2	7	23	68	200	615	1756	4797	10723	13317	5335	544	8				37396
21	1	2	7	23	68	200	615	**1764**	4959	12528	21764	16447	3624	191	1			62194
22	1	2	7	23	68	200	615	1764	5034	13616	29209	35392	15365	1897	53			103246
23	1	2	7	23	68	200	615	1764	5053	14191	34628	57925	44575	11098	804	9		170963
24	1	2	7	23	68	200	615	1764	**5060**	14469	38096	78602	93919	43262	6485	254	1	282828

Figura 1: semigrupos γ-hieperelipticos

Conclusão

- Podemos tentar determinar o número n_g usando simultaneamente o método de contar lacunas pares e multiplicidade.
- Os métodos são interessantes pois permitem estudar temas variados.

Referências

[1] N. Kaplan. Counting numerical semigroups by genus and some cases of a question of wilf. *J. Pure Appl. Algebra*, (216):1016–1032, 2012.

[2] F. Torres M. Bernardini. Counting numerical semigroups by genus and even gaps. *Discrete Math*, (340):2853–2863, 2017.

[3] J.C. Rosales and P. A. García-Sánchez. *Numerical semigroups*. Springer, 1th edition, 2009.

[4] F. Torres. On γ-hyperelliptic numerical semigroups. *Semigroup Forum*, (65):364–379, 1997.

[5] A. Zhai. Fibonacci-like growth of numerical semigroups of a given genus. *Semigroup Forum*, (86):634–662, 2013.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nivél Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.