Dimensão de Variedades Algébricas

Gabriela Gomes Gularte & Luis Renato Gonçalves Dias

Universidade Federal de Uberlândia

gularte.gabriela@outlook.com

Resumo

O presente trabalho é uma introdução elementar à tópicos de Geometria Algébrica, sendo o principal tema a dimensão de variedades algébricas. Apresentamos conceitos essenciais para compreensão do tópico e finalizamos com um resultado que garante a equivalência das dimensões algébrica e geométrica de uma variedade algébrica irredutível.

Introdução

Definição 1. *Dado I um ideal do anel de polinômios $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, definimos a variedade algébrica determinado pelo ideal I, como sendo*

$$V(I) = \{(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n \mid f(b_1, \dots, b_n) = 0, \text{ para todo } f \in I\}.$$

Dado um conjunto $V \subset \mathbb{C}^n$, definimos o ideal $I(V)$ de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ da seguinte forma

$$I(V) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid f(b_1, \dots, b_n) = 0, \forall (b_1, \dots, b_n) \in V\}.$$

Definição 2. *Uma variedade algébrica V é dita redutível quando V é uma reunião de variedades algébricas V_1 e V_2,*

$$V = V_1 \cup V_2, \qquad V \neq V_1 \text{ e } V \neq V_2.$$

Uma variedade algébrica não redutível é chamada irredutível.

Uma caracterização de variedade irredutíveis é dada pelo seguinte resultado.

Proposição 1. *Uma variedade algébrica V é irredutível se, e somente se, o ideal $I(V)$ associado a V é um ideal primo.*

Para uma variedade algébrica V no espaço afim n-dimensional $\mathbb{C}^n$, o anel quociente

$$\mathbb{C}[V] := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$$

é chamado anel de coordenadas de V.

Noções de Álgebra

Nesta seção abordaremos alguns conceitos de álgebra necessários para o cálculo da dimensão algébrica de uma variedade. Sejam $\mathbb{K}$ e F corpos, $\mathbb{K}$ é dito extensão de F se $F \subset \mathbb{K}$. Utilizaremos a seguinte notação: $F/\mathbb{K}$.

Dado $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\} \subseteq \mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ é dito algebricamente independente sobre F se não existem polinômios com coeficientes em F zerados por $\mathcal{B}$.

$$\nexists\, f \in F[y_1, \dots, y_n];\, f(X_1, \dots, X_n) = 0$$

Definição 3. *Um subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}$ é dito base de transcendência de $F/\mathbb{K}$ se*

i) $\mathcal{B}$ é algebricamente independente.

ii) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}'$ é um subconjunto algebricamente independente de F então $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

A cardinalidade de uma base de transcendência de $F/\mathbb{K}$ é chamado grau de transcendência de $F/\mathbb{K}$.

Dimensão de Variedades Algébricas

Definição 4. *Se V é irredutível, então o corpo dos quocientes f/g com f e g no domínio de integridade*

$$\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$$

é chamado de corpo de frações sobre V e é denotado por $(\mathbb{C}[V])$.

Perceba que $\mathbb{C} \subset (\mathbb{C}[V])$, dessa forma $(\mathbb{C}[V])$ é uma extensão de $\mathbb{C}$ e assim a seguinte definição pode ser feita.

Definição 5. *O grau de transcendência de $(\mathbb{C}[V])$ sobre $\mathbb{C}$ é chamado de dimensão algébrica de V sobre $\mathbb{C}$.*

Seja V uma variedade algébrica não vazia qualquer. Pelo Teorema da Base de Hilbert existe um número finito de polinômios $f_1, \dots, f_k$ que são geradores do ideal $I(V)$. Para cada $x \in V$, considere a matriz $\partial f_i/\partial x_j$ de tamanho $k \times n$ avaliado em x. Seja ρ o maior posto que esta matriz atinge em pontos de V.

Definição 6. *Um ponto $x \in V$ é dito não-singular se a matriz $(\partial f_i/\partial x_j)$ atinge seu posto máximo ρ em x, e singular se*

$$posto(\partial f_i(x)/\partial x_j)(x) < \rho.$$

A definição acima não depende da escolha dos polinômios geradores de $I(V)$.

Teorema 2. *Seja V uma variedade algébrica irredutível. Consideramos $M_1 \subset V$ o conjunto de pontos p em que o posto de V é o máximo ρ. E sendo $V_1 := V - M_1$, então*

i) M_1 é uma variedade analítica diferenciável de dimensão $n - \rho$;

ii) V_1 é vazio ou é uma variedade algébrica própria de V;

iii) $dim(V) = n - \rho$.

A dimensão de M_1 é dita dimensão geométrica de V.

A demonstração do item 2.i pode ser encontrada em [1] e as demonstrações dos itens 2.ii e 2.iii podem ser encontradas em [2], Capítulo X, seção 5.

Exemplo

Considere V a variedade definida pelo ideal de polinômios gerado por $f(x,y,z) = x^3 - y^2 + z^4$. Calculando a matriz das derivadas parciais temos:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2y & 4z^3 \end{pmatrix}.$$

Vemos que o posto desta matriz é máximo e igual à 1 exceto no ponto $(0,0,0)$. Dessa forma, se escrevermos $V = M_1 \cup V_1$, onde $V_1 = (0,0,0)$ e $M_1 = V - (0,0,0)$, percebemos que $dim M_1 = 3 - 1 = 2$, consequentemente,

$$dim V = 2.$$

Referências

[1] W. Hassler. Elementary Structure of Real Algebraic Varieties. *Annals of Mathematics*, 66(3):545–556, Novembro 1957.

[2] D. Hodge, W. V. D. e Pedoe. *Methods of Algebraic Geometry - Volume 2*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1st edition, 1952.

[3] K. Ueno. *Algebraic Geometry 1: From Algebraic Varieties to Schemes*. Kyoto: Iwanami Series in Modern Mathematics, 7th edition, 1999.

Agradecimentos

Agradecemos ao SESu/MEC pelo apoio financeiro, ao grupo PET Matemática e a Universidade Federal de Uberlândia.