Uma classificação das variedades topológicas unidimensionais

Gabriela Cristina de Sá & Walter Huaraca Vargas

Universidade Federal de Minas Gerais \ Universidade Federal de Viçosa

UFMG UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Resumo

Neste trabalho estudamos o artigo [1] de David Gale que apresenta o teorema da classificação das variedades topológicas unidimensionais. Encontramos uma extensa literatura sobre a classificações de 2-variedades, parece bem natural e simples o teorema paras as 1-variedades. No entanto, não encontramos nenhum artigo em que esta demonstração foi feita, salvo os trabalhos [3] e [2], porém nestes trabalhos as 1-variedades consideradas são variedades diferenciáveis.

Introdução

Uma topologia é uma família de subconjuntos de um conjunto dado, chamados de conjuntos abertos, que é fechada por união arbitrária e interseção finita. Um conceito fundamental nessa área são as funções chamadas de homeomorfismos: a sua importância se dá pelo fato de que se existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos então eles são essencialmente os mesmos, isto é, eles são topologicamente indistinguíveis. Um segundo ingrediente do nosso trabalho são as chamadas variedades topológicas. As variedades topológicas são espaços topológicos que localmente são similares a um espaço euclidiano. Apresentaremos o resultado obtido por David Gale em [1] que em suma prova que toda variedade topológica unidimensional é homeomorfa a um círculo, a um intervalo fechado, a um intervalo aberto ou a um intervalo semiaberto.

Objetivo

Teorema 1 (Teorema da Classificação). *Seja M uma 1-variedade topológica conexa. Então ela é homeomorfa a uma das seguintes 1-variedades:*

	sem fronteira	*com fronteira*
compacto	*um círculo*	*um intervalo fechado*
não-compacto	*um intervalo aberto*	*um intervalo semiaberto* .

Definições

Definição 1. *Seja M uma 1-variedade topológica e (U, φ) uma carta coordenada. Se U for uma bola coordenada tal que:*

(1) $\varphi(U) = (0, 1)$, então U será chamado de $\mathcal{O}-$conjunto e denotaremos por $\mathcal{O}$ o conjunto de todos os $\mathcal{O}-$conjuntos.

(2) $\varphi(U) = [0, 1)$, então U será chamado de $\mathcal{H}-$conjunto e denotaremos por $\mathcal{H}$ o conjunto de todos os $\mathcal{H}-$conjuntos. O conjunto de qualquer um dos tipos é chamado de $\mathcal{I}-$ conjunto e esta família será denotada por $\mathcal{I}$.

Definição 2. *Um subintervalo próprio aberto de $(0, 1)$ é dito inferior se for da forma $(0, b)$ e é chamado de superior se ele é da forma $(a, 1)$. Um subintervalo próprio aberto de $[0, 1)$ é dito superior se for da forma $(a, 1)$. Um intervalo superior ou inferior é chamado de extremo.*

Definição 3. *Diremos que U e V se sobrepõem quando $U \cap V \neq \emptyset$, $U \setminus V \neq \emptyset$ e $V \setminus U \neq \emptyset$.*

Resultados

Proposição 1. *Se U e V se sobrepõem e W é um componente de $U \cap V$ então $\varphi(W)$ e $\psi(W)$ são intervalos abertos e extremos.*

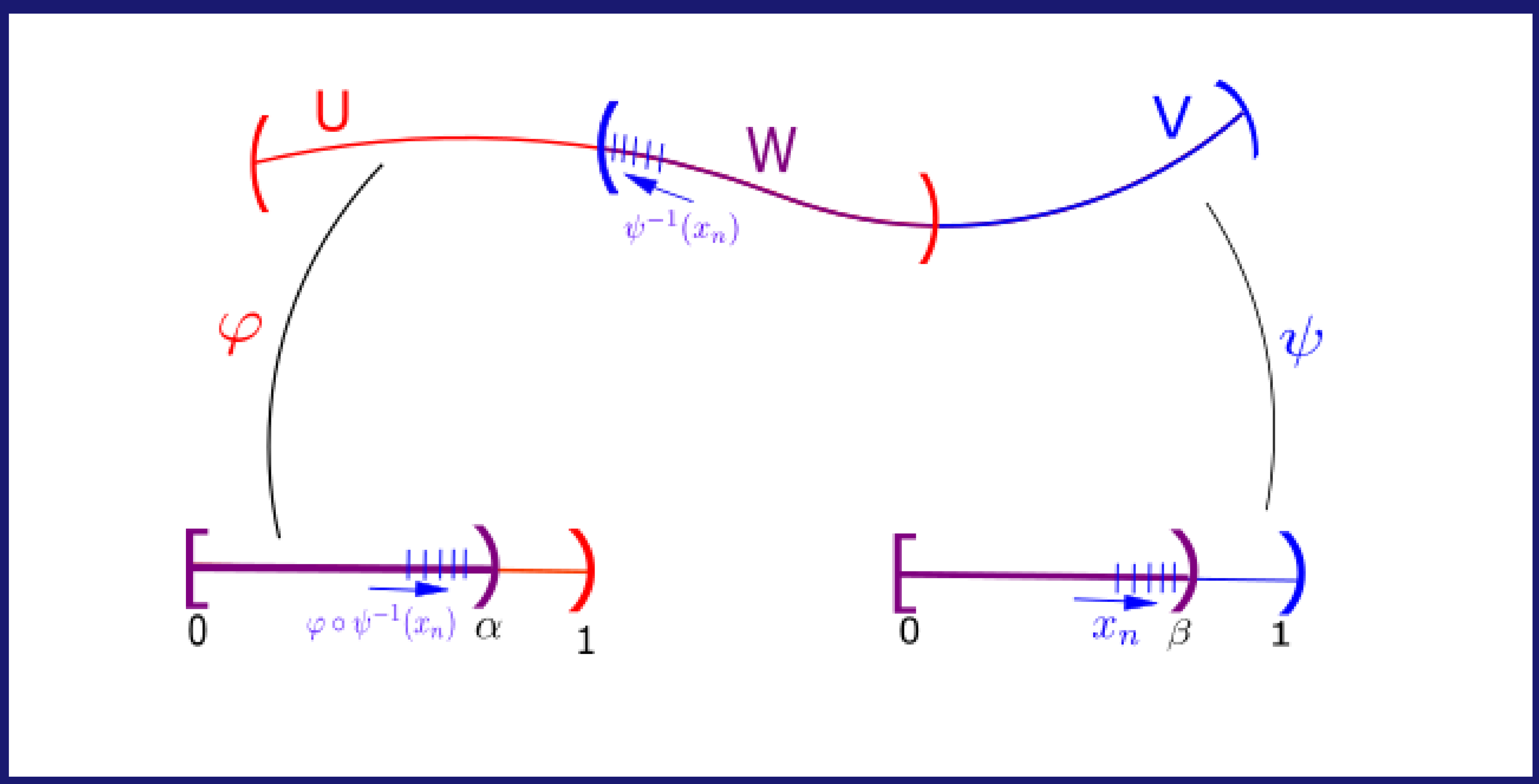

Figura 1:
Esquema para a Proposição 1.

Proposição 2. *Se X é conexo e $U \cap V$ tem duas componentes então X é homeomorfo ao círculo unitário.*

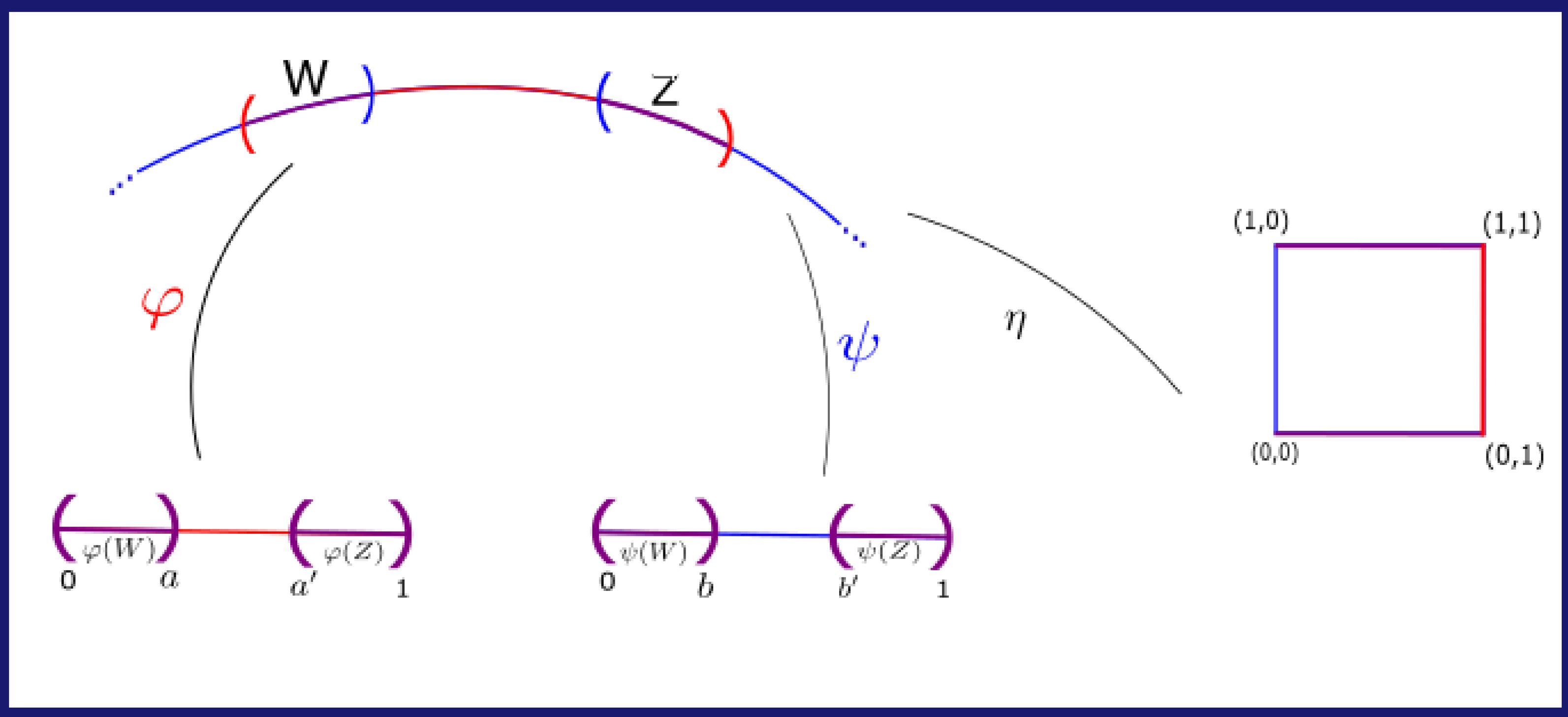

Figura 2:
Construção da aplicação η.

Proposição 3. *Se U e V se sobrepõem e $U \cap V$ é conexo, então:*

(A) Se U e V são $\mathcal{O}-$conjuntos, então $U \cup V$ é $\mathcal{O}-$conjunto.

(B) Se U é $\mathcal{H}-$conjunto e V é $\mathcal{O}-$conjunto, então $U \cup V$ é $\mathcal{H}-$conjunto.

(C) Se U e V são $\mathcal{H}-$conjuntos, então $U \cup V = X$ e X é homeomorfo a um intervalo fechado.

Teorema 1. Se X é uma 1-variedade conexa e compacta então X é homeomorfa a um círculo ou ela é homeomorfa a um intervalo fechado.

Teorema 2. Se X é uma 1-variedade conexa não compacta e sem fronteira então X é homeomorfa a um intervalo aberto semiaberto.

Referências

[1] Gale D.; *The Classification 1-Manifolds: A Take-Home Exam*, The Amarican Monthly, Vol94, pag170-175.

[2] Guillemin.V e Pollack.A; *Differential Topology*, New Jersey, 1974. Department of Mathematics, 2000.

[3] Milnor J.W.; *From the Differentiable Viewpoint* University Press of Virginia, 1965.

Agradecimentos

Ao Professor Walter Huaraca pela sua dedicação no sucesso desse projeto e ao IMPA pela oportunidade.