Um paradoxo na argumentação da diagonal de Cantor

Felipe Expósito

Universidade Federal do Rio de Janeiro - DEI

Teoria dos Números

fexfe@poli.ufrj.br

Resumo

Este estudo analisa o argumento da Diagonal de Cantor ao criar uma nova sequência que não pertena a lista de sequências originais. Ao comparar com uma de suas consequências que há infinitos de tamanhos diferentes.

Introdução

O argumento da diagonal de Cantor é estruturado da seguinte forma:
Argumento 1: Assume que existe uma lista infinita de sequências (∞_1).
Argumento 2: Corta diagonalmente cada sequência desta lista alterando cada elemento cortado por esta diagonal. Fazendo isso infinitamente gerará uma nova sequência diferente de todas as outras e que não estava listada (∞_2).
Entretanto, o que garante que o $\infty_1 = \infty_2$?

Objetivos

1. Mostrar que a diagonal de Cantor não cortará todas as sequências.
2. Utilizando como elemento chave da argumentaão o fato de existir infinitos com tamanhos diferentes.
3. Evidenciando o paradoxo.

Desenvolvimento da argumentao

Há 2 funções:
$f(n) = 2^n$
Número total de listas na sequência em função do número de algarismos.
$g(n) = n$
Número total de sequências da qual a diagonal de Cantor se diferenciou.
Para que a argumentaão de cantor seja verdadeira é preciso que $\infty_1 = \infty_2$.
Se isso for verdade entâo:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n - n = 0 \tag{1}$$

Resultados

Entretanto para todo $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} 2^n - n = \infty \tag{2}$$

Conclusão

- Pelo cálculo do limite acima fica evidente $\infty_1 \neq \infty_2$. Portanto, o argumento da diagonal de Cantor não gera uma sequência que se diferencia de todas as listas.
- Gera uma sequência que se diferencia de um subconjunto do conjunto infinito da lista de sequências.

Referências

[1] LIMA, ELON LAGES, *Curso de Análise vol. 1* , IMPA, 13a. ediåo, 2011