A MEDIDA DE LEBESGUE: UM CONJUNTO NÃO MENSURÁVEL

Eduardo Dias Lima

Universidade Federal do Goiás - UFG

duardo.dias16@hotmail.com

Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Uma das criações mais importantes da Análise do século passado foi a Integral de Lebesgue, que estendeu notavelmente a Integral de Riemann, resolveu num período de poucos anos os problemas fundamentais da Teoria da Integração e deu um impulso relevante à Análise Funcional, Teoria das Equações Diferenciais e Integrais e à Teoria da Probabilidade. O ponto básico dessa nova teoria foi a introdução da noção de medida. Medida, a grosso modo, é uma função cujo domínio é um conjunto de subconjuntos de $\mathbb{R}$ e cujo contradomínio é o conjunto dos números reais não negativos (unido com o símbolo $+\infty$). O comprimento de um intervalo, por exemplo, é uma medida, digamos L, definida sobre todos os intervalos da reta real, tal que $L(I) = b - a$, onde a e b são os extremos do intervalo L e $L(I) = +\infty$ se L for não limitado. Ora, a média L está definida apenas para intervalos. Seria interessante estender esse conceito para outros subconjuntos da reta. Neste trabalho, será definida a medida exterior de um subconjunto de $\mathbb{R}$ e, com esta medida, será definida a noção de conjunto mensurável. Em seguida, a medida de Lebesgue é apresentada.

PALAVRAS-CHAVE: Lebesgue. Conjunto Mensurável. Números Reais. Medida.

Introdução

A Teoria da Medida e Integração revolucionou várias subáreas da Análise, e suas aplicações são diversas e bem documentadas na literatura. Esta pesquisa é de cunho qualitativo, e iremos apresentar alguns conceitos básicos sobre a medida Lebesgue; medida esta que fundamenta a construção da famosa integral de Lebesgue. Apesar dessa medida estender o comprimento de intervalos na reta, existem conjuntos que ela não consegue medir. Apresentaremos aqui um exemplo desses conjuntos, que são não mensuráveis a Lebesgue.

Objetivos

Neste trabalho, não se pretende fazer um estudo sistemático sobre esta teoria, mas apresentar uma pequena parte do assunto. O objetivo principal é construir um conjunto de números reais não Lebesgue mensurável. Para isso, definiremos a medida exterior de um conjunto e alguns resultados importantes dessa definição. Em seguida, apresentaremos o conceito de medida de Lebesgue com proposições necessárias para cumprir com nosso objetivo.

Desenvolvimento e Metodologia

A Medida

Dado qualquer intervalo I de números reais estendidos, o comprimento $L(I)$ de I é definido como sendo o módulo da diferença entre seus pontos extremos. A função comprimento é um exemplo de uma função de conjuntos cujo domínio é o conjunto de todos os intervalos da reta. A família de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, contém conjuntos que não são intervalos, por exemplo $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, o conjunto ternário de Cantor e etc. Gostaríamos, então, de estender a noção de comprimento a conjuntos diferentes de intervalos, ou seja, definir uma função de conjuntos m tal que para todo conjunto E de uma certa coleção M de conjuntos de números reais corresponda um número real estendido não negativo mE chamado a medida de E. As seguintes propriedades seriam ideais para a função m:

1) mE está definida para todo conjunto E de números reais, isto é, o domínio de m é $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o conjunto das partes de $\mathbb{R}$;
2) Para qualquer intervalo I, $mI = L(I)$;
3) Se $< E_n >$ é um sequência de conjuntos disjuntos, para os quais m está definida, então $m(\cup E_n) = \sum(mE_n)$;
4) m é invariante por translação, isto é, se E é um conjunto para o qual m está definida e se $E + y = x + y; x \in E$ é o conjunto obtido pela substituição do ponto x em E pelo ponto $x + y$, então $m(E + y) = mE$.

Entretanto, veremos que é impossível construir uma função m que satisfaça as quatro propriedades acima.

Medida Exterior

Seja A um conjunto qualquer de números reais. Considere a coleção de intervalos I_n a qual cobre A, isto é, $A \subset \cup I_n$ Considere também a soma dos comprimentos de cada I_n. Uma vez que o comprimento de um intervalo é um número positivo, esta soma está unicamente determinada não importando a ordem de seus termos. Definimos então a medida exterior de A como sendo

$$m^*A = \inf_{A \subset \cup I_n} \sum L(I_n)$$

Alguns resultados seguem imediatamente da definição de medida exterior, como $m^*\emptyset = 0$, se $A \subset B$ então $m^*A \leq m^*B$ e se A contém um único ponto então A tem medida exterior igual a zero.

A proposição seguinte garante que m^* goza da propriedade 2 citada acima.

1) Se I é um intervalo qualquer, então $m^*I = L(I)$.
2) Seja $\{A_n\}$ uma coleção enumerável de conjuntos de números reais. Então $m^*(\cup A_n) \leq \sum m^*A_n$.

Vale ressaltar que mesmo sendo a coleção enumerável de conjuntos $\{A_n\}$ uma coleção de conjuntos disjuntos, pode não valer a igualdade.

Conjuntos Mensuráveis e a Medida de Lebesgue

Uma vantagem da função m^* é que ela está definida para qualquer conjunto de números reais. Entretanto, nem sempre a propriedade 3 será satisfeita devido a Proposição 2. Será satisfeita quando restringirmos a família $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de conjuntos na qual m^* está definida. Talvez a melhor maneira de assim fazer seja usando a seguinte **Definição:** Um conjunto E é dito mensurável se para cada conjunto A tivermos

$$m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Teorema 1. A coleção M de conjuntos mensuráveis é uma σ - álgebra, isto é, o complementar de um conjunto mensurável é mensurável e a união (e interseção) de uma coleção enumerável de conjuntos mensuráveis é mensurável. Mais ainda, todo conjunto com medida exterior igual a zero é mensurável. Seja E um conjunto mensurável. Definimos a medida de Lebesgue mE como sendo a medida exterior de E. A função m nada mais é do que uma restrição da função m^* a família M de conjuntos mensuráveis.

Proposição 3. Seja $< E_n >$ uma sequência de conjuntos mensuráveis. Então

$$m(\cup E_n) \leq \sum mE_n.$$

Lema 1. Seja $E \subset [0, 1]$ um conjunto mensurável. Então para cada $y \in [0, 1]$ o conjunto $E + y$ é mensurável e $m(E + y) = mE$.

Um Conjunto não Mensurável

Afim de concluir nosso trabalho, vamos considerar no intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ a seguinte relação:

$$x, y \in [0, 1]; x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ é racional.}$$

É fácil verificar que $\sim$ define uma relação de equivalência no conjunto $[0, 1]$. Com isso, escolhemos um representante de cada classe de equivalência definida por $\sim$. Isso é possível devido ao Axioma da Escolha. Chamemos de V o conjunto formado por esses representantes. Considere $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma enumeração do conjunto $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ onde $\mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números racionais. Defina:

$$S = \bigcup_{j=1}^{\infty}(V + r_j), \text{ onde } V + r_j = x + r_j : x \in V$$

Para mostrar que o conjunto V é não mensurável, vamos primeiramente provar que as seguintes inclusões são verdadeiras: $[0, 1] \subseteq S \subseteq [-1, 2]$. Seja então $x \in [0; 1]$. Pela construção do conjunto V, existe $y \in V$ tal que $r = x - y \in \mathbb{Q}$. Como $x, y \in [0, 1]$, a diferença $r = x - y$ é no máximo 1 e no mínimo -1, portanto $x - y = r \in [-1, 1]$. Logo, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $r = r_j$. Isso mostra que $x = y + r_j \in (V + r_j) \subset S$. Daí $[0, 1] \subset S$. Seja dado agora $x \in S$, isto é, $x = y + r_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$ e $y \in V$. Como $r_j \in [-1, 1]$ e $y \in V \subset [0, 1]$, a soma $y + r_j \in [-1, 2]$. Portanto $x \in [-1, 2]$ e daí $S \subset [-1, 2]$. E as inclusões estão provadas. Observe que os conjuntos $\{V + r_j : j \in \mathbb{N}\}$ são dois a dois disjuntos. De fato, seja $x \in (V + r_j) \cap (V + r_i)$, então $x = y + r_j = z + r_i$ com $y, z \in V$ e $i, j \in \mathbb{N}$. Portanto $y - z \in \mathbb{Q}$ e com isso $y \sim z$. Como V foi construído tomando um único elemento de cada classe de equivalência, temos que $y = z$, o que implica $i = j$. Suponha agora, por absurdo, que V seja mensurável. Decorre da proposição 1, da proposição 3 e do Lema 1 que:

$$[0, 1] \subseteq S \subseteq [-1, 2] \Rightarrow m([0, 1]) \leq m(S) \leq m([-1, 2]) \Rightarrow$$

$$1 \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(V) \leq 3.$$

Note que o somatório na desigualdade acima pode assumir apenas dois valores, saber, zero, quando $m(V) = 0$, ou infinito, quando $m(V) > 0$. Mas isso é um absurdo, pois essa soma está entre 1 e 3. A contradição se deve ao fato de admitir que V é mensurável.

Referências

[1] ROYDEN, H. L., **Real Analysis**. Stanford, Califórnia, 1968.

[2] FERNANDEZ, P. J., **Medida e Integração**. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 1986.