Aplicando a Transformada de Fourier na Equação da Onda com Oscilação Forçada

Dhiêgo Portella, Cristiane Faria, C.F. Vasconcellos

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro

dhiegoportellaconradosl@gmail.com, cofaria@ime.uerj.br, cfredvasc@ime.uerj.br

Resumo

Propomos uma solução para a equação da onda com oscilação forçada via transformada de Fourier. Uma poderosa ferramenta que permite estabelecer uma identificação entre EDP's e EDO's.

Introdução

0.1 A Equação da Onda

A equação da onda pode representar diversos fenômenos físicos, como por exemplo, vibrações numa corda dedilhada e propagação de ondas eletromagnéticas. Um caso clássico para a obtenção da equação da onda é o problema de propagação de pertubações em uma corda flexível e esticada [1] que pode ser descrito da seguinte forma: supondo que os deslocamentos, ocorram somente na direção vertical e em torno do eixo x (eixo onde consideramos a corda esticada), ao aplicarmos a 2^a lei de Newton num trecho infinitesimal da corda obtemos a seguinte Equação Diferencial Parcial (EDP), $u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t)$, onde $u(x,t)$ representa o deslocamento vertical do ponto x da corda no instante t, c é a velocidade de propagação da onda que depende da densidade da corda e da resultante horizontal das tensões, as quais o trecho está submetido, e $h(x,t)$ é o termo associado à uma força exterior (oscilação forçada).

0.2 A Transformada de Fourier

Seja $f \in \mathcal{L}^1$ transformada de Fourier de f é definida por:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ inversa é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) e^{i\xi x} d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Objetivos

Resolução do problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{ll} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Onde $f \in C^2(\mathbb{R}), g \in C^1(\mathbb{R}), h \in C(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$ e, para cada $t > 0$ fixo, $h(.,t) \in C^2(\mathbb{R})$, por aplicação da transformada de Fourier.

Resultados

Fixando t e aplicando a transformada de Fourier, em relação a x, na EDP, obtemos $\widehat{u}_{tt}(\xi,t) = -c^2\xi^2\widehat{u}(\xi,t) + \widehat{h}(\xi,t)$.Para cada ξ fixo, podemos entender a equação como uma EDO não homogênea de segunda ordem. Cujas soluções homogêneas são $\widehat{u}_1(\xi,t) = e^{i\xi ct}$ e $\widehat{u}_2(\xi,t) = e^{-i\xi ct}$. Sendo $W(\xi,t) = -2i\xi c$ o wronskiano. Uma solução particular é da forma $\widehat{u}_p(\xi,t) = \widehat{\alpha}_1(\xi,t)\widehat{u}_1(\xi,t) + \widehat{\alpha}_2(\xi,t)\widehat{u}_2(\xi,t)$

Onde $\widehat{\alpha}_1(\xi,t) = \int_0^t \frac{\widehat{h}(\xi,s)e^{-i\xi cs}}{2i\xi c} ds$ e $\widehat{\alpha}_2(\xi,t) = \int_0^t \frac{-\widehat{h}(\xi,s)e^{i\xi cs}}{2i\xi c} ds$

Então $\widehat{u}_p(\xi,t) = \int_0^t \frac{\widehat{h}(\xi,s) sen(\xi c(t-s))}{\xi c} ds$. Assim, a solução geral é dada por $\widehat{u}(\xi,t) = C_1 e^{i\xi ct} + C_2 e^{-i\xi ct} + \int_0^t \frac{\widehat{h}(\xi,s) sen(\xi c(t-s))}{\xi c} ds$

Seja $\xi_I(\xi)$ a função característica do intervalo $I = [-c(t-s), c(t-s))$, então $\frac{\sqrt{2\pi}}{2c}\widehat{\xi}_I(\xi) = \frac{sen(\xi c(t-s))}{\xi c}$. Aplicando as condições iniciais, obtemos $\widehat{u}(\xi,t) = \frac{1}{2}\widehat{f}(\xi)[e^{i\xi ct} + e^{-i\xi ct}] + \frac{i}{2\xi c}\widehat{g}(\xi)[e^{-i\xi ct} - e^{i\xi ct}] + + \int_0^t \frac{\widehat{h}(\xi,s)\sqrt{2\pi}\widehat{\xi}_I(\xi)}{2c} ds$

Na parte homogênea:

A primeira parcela é imediata. Na segunda, note que se $g(x) = G'(x)$, então $\frac{i}{2\xi c}\widehat{g}(\xi) = \frac{i}{2\xi c}(i\xi\widehat{G}(\xi))$. Então $u_h(x,t) = \frac{[f(x+ct)+f(x-ct)]}{2} + \frac{1}{2c}[G(x+ct) - G(x-ct)]$ Isto é, $u_h(x,t) = \frac{[f(x+ct)+f(x-ct)]}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$. Aplicando a transformada inversa sobre a solução particular, temos que

$$\begin{aligned} u_p(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \int_0^t \frac{\widehat{h}(\xi,s)\sqrt{2\pi}\widehat{\xi}(\xi)}{2c} ds d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \frac{1}{2c} \int_0^t \widehat{h * \xi_I}(\xi,s) ds d\xi \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t e^{i\xi x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \widehat{h * \xi_I}(\xi,s) ds d\xi \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t (h * \xi_I)(x,s) ds \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(y,s)\xi_I(x-y) dy ds \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(y,s) dy ds \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{[f(x+ct) + f(x-ct)]}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \\ & + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(y,s) dy ds \end{aligned}$$

Conclusão

A transformada de Fourier nos permitiu encontrar a solução de um modo simples. Note que, a aplicação no trecho homogêneo evidenciou as curvas características da equação da onda ($y = x + ct$, $y = x - ct$) e, como era de se esperar, obtemos a conhecida solução de D'alembert. Mais ainda, tratamos o problema de uma EDP linear e não homogênea como uma EDO linear e não homogênea, cujo método de solução (variação dos parâmetros) é uma ferramenta eficaz e bem estabelecida.

Referências

[1] D. G. FIGUEIREDO. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA, 4th edition, 2009.

[2] V. IORIO. *EDP, um Curso de Graduação*. IMPA, 3rd edition, 2012.