Sistemas Dinâmicos Lineares no Plano

Dhara Cristina de Freitas Lago Grande & Luciana Aparecida Alves

Universidade Federal de Uberlândia

Bolsista PET Matemática

dharacristina1999@gmail.com

Resumo

Sistemas Dinâmicos são sistemas compostos por EDO's de ordem n cujas equações independem do tempo. Neste trabalho definiremos sistemas dinâmicos lineares e estudaremos o comportamento de um dos principais exemplos desse conteúdo: o oscilador harmônico. Ademais, apresentaremos os cálculos e condições que nos levaram à representação dos retratos de fase aqui expostos.

Introdução

Definimos $F(X) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, onde Ω é o domínio da função e $X \in \mathbb{R}^n$. Os sistemas dinâmicos de primeira ordem são representados por

$$\dot{X} = F(X) = AX + h(X).$$

Definição 1. *Os sistemas dinâmicos lineares no $\mathbb{R}^2$ são representados da forma $\dot{X} = AX + h(X)$, onde a função $h(X)$ é nula, ou seja, igual a zero, assim sendo, podemos reescrever a equação da seguinte forma:*

$$\dot{X} = AX,$$

onde $A \in M_2(\mathbb{R})$ com coeficientes constantes. É equivalente escrever

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}. \qquad (1)$$

Definição 2. *O ponto crítico $X = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ é o único ponto de equilíbrio do sistema no qual $F_i(X) = 0$, para $i = 1, 2$.*

Resolvendo (1) pelo método de eliminação, obtemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a + d)\frac{dx}{dt} + (ad - bc)x = 0. \qquad (2)$$

Deste modo, dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, denotaremos $(a+d) = \Theta$ por **traço**, e $(ad-bc) = \Gamma = det(A)$.

Conseguimos, assim, relacionar (2) com o **polinômio característico** na forma:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \Theta\lambda + \Gamma = 0, \qquad (3)$$

onde λ raízes do polinômio são chamados **autovalores** ou **valores próprio**.

Teorema 1. *Sejam $X = (0, 0)$ o ponto crríctico do sistema linear, $\phi(t)$ a solução do sistema, $\Theta = (a + d)$ e $\Gamma = det(A)$, classificamos $X = (0, 0)$ como:*

1. ***assintitocamente estável** se $\Theta < 0$ e $\Gamma > 0$; Na condição de $\exists\ \delta_0 > 0$ tal que, se $\|\phi(t) - X\| < \delta_0$, então*
$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = X.$$
2. ***estável** se $\Theta = 0$ e $\Gamma > 0$; Na condição de, dado $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, para toda solução $\phi(t)$ que satisfaça $t = t_0$, tem-se que, se $\|\phi(t_0) - X\| < \varepsilon$, então $\|\phi(t) - X\| < \delta$, para todo $t \leq t_0$.*
3. ***instável** se $\Theta > 0$ e $\Gamma < 0$; Na condição de, $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que, $\forall\ \delta > 0$ tem-se que, se $\|\phi(t_0) - X\| < \delta$, então $\|\phi(t) - X\| > \varepsilon$, para algum $t > t_0$.*

A demonstração do teorema acima se encontra em [1]. A tabela abaixo resume todas as condições apresentadas.

Discriminante	Autovalor	Tipo de Ponto de Equilíbrio	Estabilidade
$\Delta > 0$	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nó	Instável
	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nó	AE
	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	PS	Instável
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nó	Instável
	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nó	AE
$\Delta < 0$	$\lambda = \alpha \pm i\beta$		
	$\alpha > 0$ (i)	PE	Instável
	$\alpha < 0$ (ii)	PE	AE
	$\alpha = 0$	Centro	Estável

Figura 1: AE: Assintoticamente Estável; PS: Ponto de Sela; PE: Ponto Espiral

Oscilador Harmônico Simples

Nessa seção trabalharemos com o oscilador harmônico simples, um dos principais exemplos dentro do estudo de sistemas dinâmicos lineares. De [1], temos que a equação de um oscilador harmônico referente à (2) é dada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (4)$$

O caso que será exemplificado aqui se restringirá às condições de $m = 1$ (massa) e $b = 0$ (velocidade escalar). Isto posto, podemos reescrever (4) da forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (5)$$

Adotando $k > 0$. Chamaremos $\frac{dx}{dt} = y$ para que possamos obter o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -kx \end{cases}. \qquad (6)$$

Para iniciarmos o estudo, por definição temos que encontrar os valores de Θ e Γ, portanto escreveremos o nosso sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (7)$$

e encontraremos $\Theta = 0$ e $\Gamma = k$. Ainda mais, de (3) podemos encontrar $\Delta = -4k$ referente ao polinômio $P(\lambda) = \lambda^2 + k = 0$.

Como $\Delta < 0$, obtemos duas raízes complexas conjugadas da forma $\alpha+\beta i$, onde $\lambda_1 = +i\sqrt{k}$ e $\lambda_2 = -i\sqrt{k}$ são soluções da equação do segundo grau em λ. E logo poderemos obter as trajetórias das órbitas correspondentes à esse sistema no retrato de fase que seguirá as condições apresentadas em Figura 1.

Para analisarmos o comportamento das órbitas do nosso sistema, multiplicamos as duas equações de (6) e resolvemos a EDO encontrada

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{kx} \Rightarrow kxdx + ydy = 0$$

Aplicando integral, encontramos

$$k\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Note que a equação encontrada se assemelha muito à equação de uma elipse, logo, fazendo as devidas alterações, obtemos

$$\frac{x^2}{(\sqrt{\frac{C}{k}})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{C})^2} = 1, \qquad (8)$$

com C constante.

Analisando Figura 1, somos capazes de construir os seguintes **retratos de fase**.

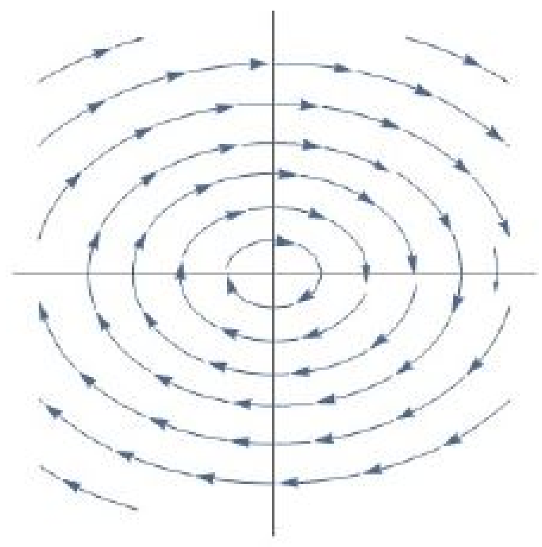

Figura 2: $0 < k < 1$

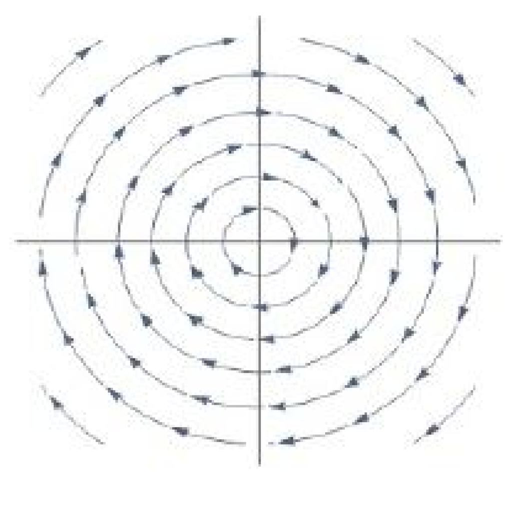

Figura 3: $k = 1$

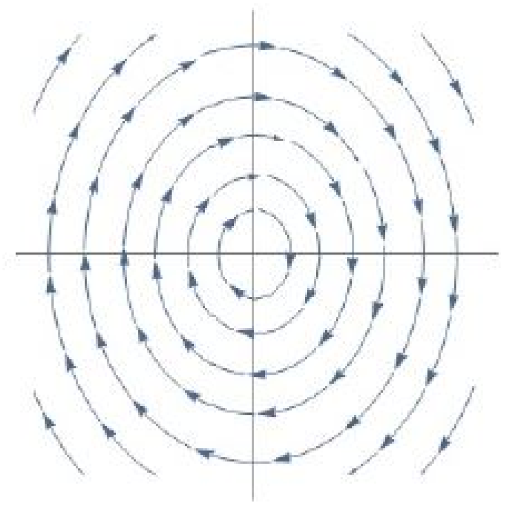

Figura 4: $k > 1$

Conclusão

Os sistemas dinâmicos, portanto, nos possibilitam estudar o comportamento de um fenômeno em determinado tempo, seja ele variante (ou seja, há alterações no sistema estudado com o decorrer do tempo, por exemplo, perda de massa por parte do objeto que está sendo analisado, como é o caso de um foguete em sua fase propulsada) ou invariante e, no caso dos sistemas lineares, aproximar, por meio de equações algébricas e diferenciais, uma modelagem que nos permita conhecer qual o comportamento esperado para aquele sistema em um determinado t que queiramos saber.

Referências

[1] J. S. P. Ferreira, *Sistemas Dinâmicos Lineares no $\mathbb{R}^n$*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1ª edição, 2016.

[2] W. E. Boyce e R. C. DiPrima, *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iorio, Rio de Janeiro: LTC, 10ª edição, 2015.