Precessão de Thomas e de Spin relativístico

Danilo Machado Tereza

Universidade Federal de Juiz de Fora

danilomachadot@gmail.com

Resumo

Uma explicação satisfatória para a descrição dos níveis de energia atômico foi alcançada por Uhlenbeck-Goudsmit e Thomas, cujo formalismo hamiltoniano foi proposto posteriormente por Pauli. Divergências surgiram na busca por uma construção covariante desta teoria, porém, com o intuito de explicá-la Thomas comparou as taxas de variação do spin no laboratório e em um observador que acompanha a partícula. A relação resultante foi a famosa fórmula da precessão de Thomas.

Modelo clássico do elétron com spin

Uhlenbeck-Goudsmit e então Thomas [1] mostraram que

$$m\ddot{\mathrm{x}} = e\mathrm{E} + \frac{e}{c}[\dot{\mathrm{x}}, \mathrm{B}]. \tag{1}$$

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} = -\frac{e}{mc}\left\{[\mathrm{B}, \mathrm{S}] - \frac{1}{2mc}[[\mathrm{p}, \mathrm{E}], \mathrm{S}]\right\} \tag{2}$$

junto com a regra de quatização de Bohr do movimento angular possibilitam uma descrição satisfatória dos níveis de energia atômico. Pauli notou que (1) e (2) seguem do formalismo Hamiltoniano

$$H_p = \tfrac{1}{2m}\left(\mathrm{p} - \tfrac{e}{c}\mathrm{A}\right)^2 + eA^0 - \tfrac{e}{mc}\left\{(\mathrm{S}, \mathrm{B}) + \tfrac{1}{2mc}(\mathrm{S}, [\mathrm{E}, \mathrm{p}])\right\} \tag{3}$$

com os colchetes canônicos (mostramos apenas os não nulos)

$$\{x^i, p^j\} = \delta^i{}_j \quad \{S^i, S^j\} = \epsilon^{ijk}S^k \tag{4}$$

Com a formulação Hamiltoniana, Pauli construiu a mecânica quântica do elétron com spin respeitando a regra de quantização de Dirac

$$[\hat{z}^A, \hat{z}^B] = i\hbar\{z^A, z^B\}\,\big|_{z\to\hat{z}} \tag{5}$$

onde os operadores são

$$\hat{p} = -i\hbar\partial_i, \quad \hat{x}^i = x^i, \quad \hat{S}^i = \frac{\hbar}{2}\sigma^i \tag{6}$$

Substituindo as variáveis clássicas de (3) pelos operadores, Pauli obteve o Hamiltoniano quântico

$$\hat{H}_{ph} = \tfrac{1}{2m}\left(\hat{\mathrm{p}} - \tfrac{e}{c}A(x^i)\right)^2 + eA^0(x^i) - \tfrac{e}{mc}\left\{(\hat{\mathrm{S}}, \mathrm{B}) + \tfrac{1}{2mc}(\hat{\mathrm{S}}, [\mathrm{E}, \hat{\mathrm{p}}])\right\} \tag{7}$$

e mostrou que a mecânica quântica resultante reproduz os níveis de energia atômico, [2].

Formalismo covariante

Assumindo que o 3-vetor de spin S^i é a parte espacial de um 4-tensor de spin $S^{\mu\nu}$, a teoria covariante

$$H = \frac{1}{2m}\left[(p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu)^2 - \frac{e}{2c}F_{\mu\nu}S^{\mu\nu} + (mc)^2\right] \tag{8}$$

resulta na seguinte dinâmica:

$$H_{ph} = mc^2 + \tfrac{1}{2m}\left(\mathrm{p} - \tfrac{e}{c}\mathrm{A}\right)^2 + eA^0 - \tfrac{e}{mc}\left\{(\mathrm{S}, \mathrm{B}) + \tfrac{1}{mc}(\mathrm{S}, [\mathrm{E}, \mathrm{p}])\right\} \tag{9}$$

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} = -\frac{e}{mc}\left\{[\mathrm{B}, \mathrm{S}] + \frac{1}{mc}[\mathrm{E}, [\mathrm{p}, \mathrm{S}]]\right\}, \tag{10}$$

enquanto (1) permanece o mesmo. Além dessas diferenças, para que a condição covariante $S^{\mu\nu}\mathcal{P}_\nu = 0$ seja satisfeita são necessárias as alterações

$$\{x^i, S^j\} = \tfrac{p^iS^j - \delta^i{}_j(\mathrm{p},\mathrm{S})}{(mc)^2} \quad \{S^i, S^j\} = \epsilon^{ijk}\left(S^k + \tfrac{p^k(\mathrm{p},\mathrm{S})}{(mc)^2}\right) \tag{11}$$

enquanto $\{p^i, p^j\}, \{x^i, p^j\}$ e $\{p^i, S^j\}$ permanecem canônicos. A partir da regra de quantização de Dirac (5), os comutadores dos operadores hermitianos

$$\hat{p} = -i\hbar\partial_i, \quad \hat{x}^i = x^i - \frac{\hbar}{4(mc)^2}\epsilon^{ijk}\hat{p}^j\sigma^k \tag{12}$$

$$\hat{S}^i = \frac{\hbar}{2}\left\{\sigma^i + \frac{1}{2(mc)^2}[\hat{\mathrm{p}}, [\sigma, \hat{\mathrm{p}}]]\right\} \tag{13}$$

estão em correspondência com os colchetes não canônicos já calculados. Para o último comutador, obtemos

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = \frac{i\hbar}{(mc)^2}\epsilon^{ijk}\hat{S}^k \overset{(5)}{\Longrightarrow} \{x^i, x^j\} = \frac{1}{(mc)^2}\epsilon^{ijk}S^k \tag{14}$$

completando assim nossa coleção de colchetes da teoria covariante.

Equivalência entre formulações de Pauili e covariante

Substituindo os operadores em $A^\mu(\hat{x}^i)$ e expandindo a expressão resultante em séries até a ordem $1/c^2$, obtemos

$$eA^0(\hat{x}^i) = eA^0(x^i) + \frac{e}{2(mc)^2}(\hat{\mathrm{S}}, [\hat{\mathrm{E}}, \hat{\mathrm{p}}]) \tag{15}$$

Substituindo as variáveis clássicas do hamiltoniano (9) pelos operadores hermitianos, o hamiltoniano quântico da teoria covariante será o mesmo que (7). Portanto as teorias são equivalentes a nível quântico. Além disso, definindo

$$p_c^i = p^i, \quad x_c^i = x^i + \frac{1}{2(mc)^2}\epsilon^{ijk}p^jS^k \tag{16}$$

$$S_T^i = S^i + \frac{1}{2(mc)^2}[\mathrm{p}, [\mathrm{p}, \mathrm{S}]]^i \tag{17}$$

transformações (16) e (17) caracterizam $\{x_c^i, p_c^i, S_T^i\}$ com colchetes canônicos. O hamiltoniano físico da teoria covariante, (9), escrito em termos destas variáveis transforma-se no hamiltoniano de Pauli. Portanto as teorias são equivalentes a nível clássico.

Conclusão

O spin de Thomas (17) é uma quantidade do espaço de fase construído a partir do formalismo covariante e seu papel nesta teoria é coincidir numericamente com o spin de Frenkel no observador acompanhante. Entretanto $\mathbf{S_T}$ não se estende a este formalismo covariante, consequentemente, (17) é valida somente no laboratório.

Embora a justificativa de Thomas tenha sido amplamente aceita [3], ressaltamos que sua fórmula relaciona quantidades em sistemas de coordenadas diferentes, o que não se aplica nesse contexto. Mesmo assim, pode-se computar uma precessão da taxa de variação do spin quando escolhido certos referenciais.

Referências

[1] L. H. Thomas, *The Kinematics of an Electron with an Axis. Phil. Mag.*, S. 7. Vol. 3. No. 13. Jan. 1927.

[2] W. Pauli, Jr., *Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. Zeit. f. Phys*, 43:601–623, 1927.

[3] G. B. Malykin *Thomas Precession: Correct and Incorrect Solutions. Phys-Usp*, 49:837–853, 2006.

[4] L. H. Thomas, *Motion of the Spinning Electron. Nature*, 177:p514. 1926

[5] S. Weinberg, *Lectures on Quantum Mechanics. Cambridge University Press*, 1. ed. 1–28. 2013.

[6] A. Deriglazov, *Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalism. Springer*, 2. ed. 2017.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001