Minimização de Função Real Pelo Método da Seção Áurea

Amanda Maciel de Oliveira
Danielly Araujo Pereira dos Santos[1]
João Victor da Silva
Talia Correia Schulz
Orientador: Prof. Dr. Abel Soares Siqueira[2]
Universidade Federal do Paraná
[1]daniellyaps97@gmail.com, [2] abelsiqueira@ufpr.br

DMAT - UFPR

impa
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Resumo

Neste trabalho iremos abordar um dos métodos para minimizar funções unimodais, denominado método da Razão Áurea. Este consiste em estreitar um intervalo inicial de um certo modo que a distância entre os intervalos divididos respeitem a razão áurea.

1. Seção Áurea

O método da seção áurea fundamenta-se em encontrar o mínimo local de uma função contínua e unimodal em um intervalo fechado.

Definição 1. *Uma função contínua* $\rho : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *é dita unimodal quando admite um conjunto de minimizadores* $[x_1, x_2]$, *é estritamente decrescente em* $[0, x_1]$ *e estritamente crescente em* $[x_2, \infty]$.

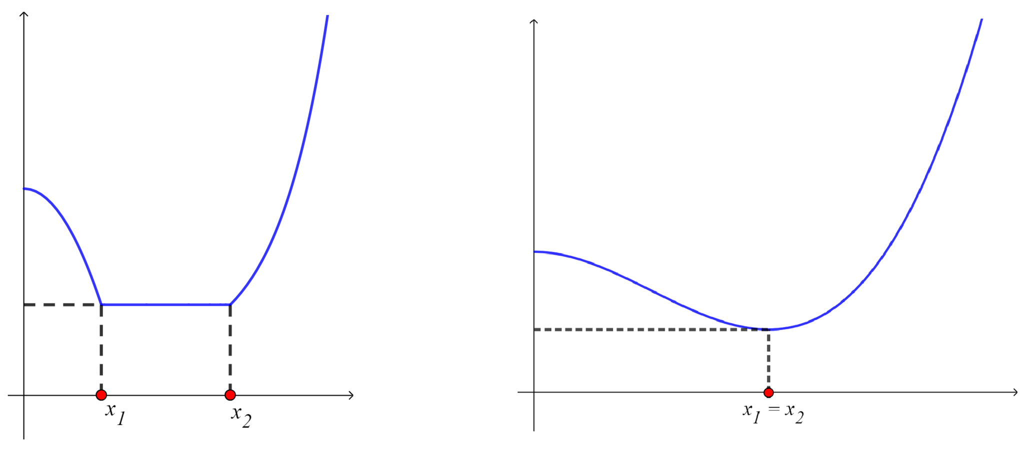

Figura 1: *Exemplos de Funções Unimodais*

Definição 2. *Um ponto divide o intervalo* $[a, b]$ *na razão áurea, quando a razão entre o maior segmento e o segmento todo é igual à razão entre o menor e o maior dos segmentos.*

Assim, u e v devem satisfazer as seguintes equações:

$$\frac{v-a}{b-a} = \frac{b-v}{v-a} \quad \text{e} \quad \frac{b-u}{b-a} = \frac{u-a}{b-u}$$

Dito isso temos a seguinte relação:

$$u = a + \theta_1(b-a)$$

$$v = a + \theta_2(b-a)$$

Onde $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$, são as proporções que desejamos encontrar. Manipulando as equações de forma adequada obtemos:

$$\theta_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382$$

$$\theta_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$$

Note que a razão entre θ_1 e θ_2 corresponde a proporção áurea por isso denominamos o método de tal forma.

A cada iteração é descartado 38,2% do intervalo inicial, restando 61,8% para procurar o minimizador.

2. Algoritmo

Para implementar o método separaremos o algoritmo em duas partes. A primeira consiste em definir o intervalo $[a, b] \subset [0, \infty)$, a partir de um intervalo $[0, 2s]$, para $s > 0$, de modo que $[a, b]$ contenha o minimizador ξ.

Já na segunda parte restringimos $[a, b]$ em subintervalos, até que um intervalo de tamanho ϵ seja alcançado.

Algorithm 1 Seção Áurea Parte 1: Encontra o intervalo [a,b]

Entrada: $\varphi(x), \alpha > 0$
$a \leftarrow 0$
$s \leftarrow \alpha$
$b \leftarrow 2\alpha$
while $\varphi(b) < \varphi(s)$ **do**
  $a \leftarrow s$
  $s \leftarrow b$
  $b \leftarrow 2b$
end while
Saída a, b

Na parte 1 (encontra o intervalo $[a, b]$) o algoritmo funciona da seguinte forma:

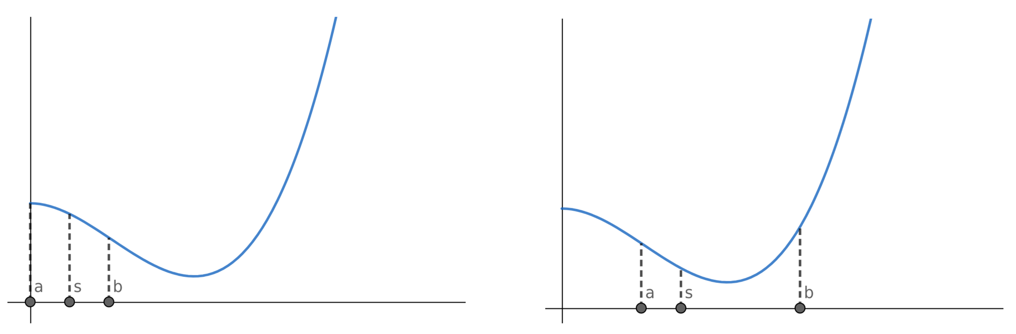

Figura 3: *Primeira e última iteração da parte 1*

Associamos as variáveis aos seus respectivos valores Como $\varphi(b) < \varphi(s)$ então o minimizador não está nesse intervalo, e por isso $a = s, s = b, b = 2b$. Continuando esse processo até que $\varphi(b) > \varphi(s)$ obtemos o intervalo $[a, b]$ de acordo com o teorema a seguir.

Teorema. *A parte 1 do Algoritmo Seção Áurea, encontra um intervalo* $[a, b]$ *que contém pelo menos um minimizador da função em um número finito de iterações.*

Algorithm 2 Seção Áurea Parte 2: Encontra o minimizador

Entrada: $\epsilon > 0, \theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \theta_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \varphi(x), a, b$
$u \leftarrow a + \theta_1(b-a)$
$v \leftarrow a + \theta_2(b-a)$
while $|b-a| > \epsilon$ **do**
  if $\varphi(u) < \varphi(v)$ **then**
    $b \leftarrow v$
    $v \leftarrow u$
    $u \leftarrow a + \theta_1(b-a)$
  else
    $a \leftarrow u$
    $u \leftarrow v$
    $v \leftarrow a + \theta_2(b-a)$
  end if
end while
Saída: x correspondente ao menor entre $\varphi(a), \varphi(u), \varphi(v), \varphi(b)$

Antes de aplicar a segunda parte do algoritmo, veremos alguns resultados.

Teorema. *Seja* φ *uma função unimodal.*

(i) *se* $\varphi(v) \leq \varphi(u)$ *e o intervalo* $[a, u)$ *é descartado, então o intervalo que sobrou* $[u, b]$ *contém pelo menos um minimizador.*

(ii) *se* $\varphi(v) \geq \varphi(u)$ *e o intervalo* $(v, b]$ *é descartado, então o intervalo que sobrou* $[a, v]$ *contém pelo menos um minimizador.*

Lema. *No método da seção áurea se* $(v, b]$ *é descartado então,* $v_+ = u$.

Dado o intervalo $[a, b]$. Como $\varphi(u) < \varphi(v)$ então o intervalo $(v, b]$ será descartado . Assim $b = v, v = u, u = a + \theta_1(b-a)$. Agora, como $\varphi(u) > \varphi(v)$ temos $a = u, u = v, v = a + \theta_2(b-a)$. Continuando as iterações até encontrarmos o minizador, isto é, parando quando $(b-a) < \epsilon$.

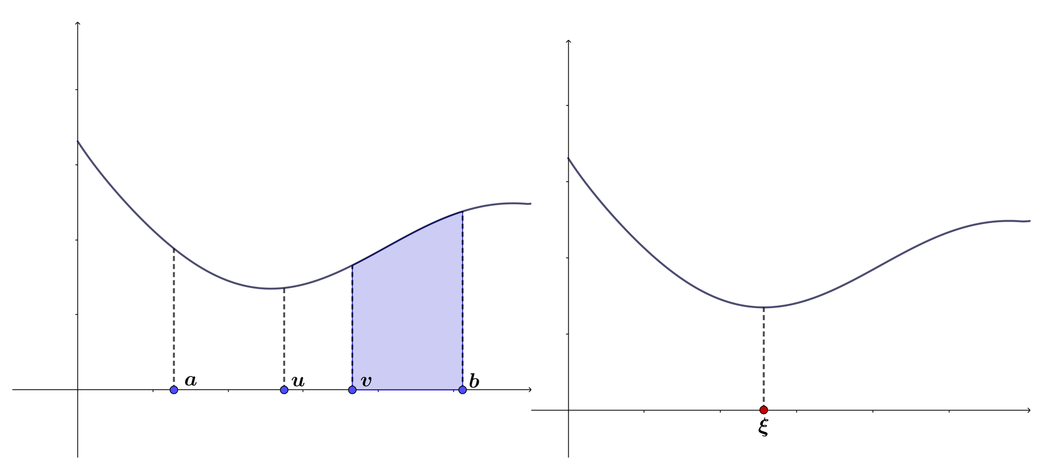

Figura 5: *Primeira e última iteração da parte 2*

3. Comparação com outro método

Na comparação será feito tudo da mesma forma que no método da seção áurea com apenas duas exceções: a proporção e a reutilização do ponto.

3.1 Proporção 1/3

Buscaremos um intervalo será particionado em uma proporção de 1:3, isto é,

$$u = a + \tfrac{1}{3}(b-a) \quad \text{e} \quad v = a + \tfrac{2}{3}(b-a)$$

Nesse método, ao descartar um intervalo o ponto que restar estará localizado no ponto médio do novo intervalo e não poderá ser reaproveitado na partição seguinte.

3.2 Aleatória

Diferente da razão áurea que obtem pontos específicos no intervalo de acordo com sua proporção, esse método tende a utilizar pontos escolhidos aleatoriamente. Mas em construste com o método anterior, eles serão reaproveitados a cada iteração. Veja abaixo algumas das funções criadas especificamente para fazer as comparação desse projeto:

$$a(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x+2)}{ln(x+2)} + 2, & 0 \leq x \leq 6 \\ (x-6)^2 + 2.48, & x \in (6, +\infty) \end{cases}$$

$$b(x) = (x-2)^2 + 4$$

$$c(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$d(x) = \left| x - 4 + \sin\left(\frac{3(x-4)}{4}\right) \right|$$

A tabela [1] referente às proporções relacionadas a cada método em que calculamos o quão próximo do resultado está o mínimo, ou seja, as casas de precisão e a quantidade de iterações. Para todas as funções utilizamos o mesmo critério de parada. Em seguida temos os gráficos que relacionam o número de iterações com o erro absoluto entre o mínimo encontrado e o mínimo real das funções a(x) e b(x).

	Casas de Precisão			Iteração		
Função	Áurea	Equidist	Aleatória	Áurea	Equidist	Aleatória
a(x)	5	4	4	24	28	44
b(x)	4	5	5	22	26	26
c(x)	6	5	4	21	24	41
d(x)	6	4	5	24	28	38

Tabela 1: *Tabela de comparação*

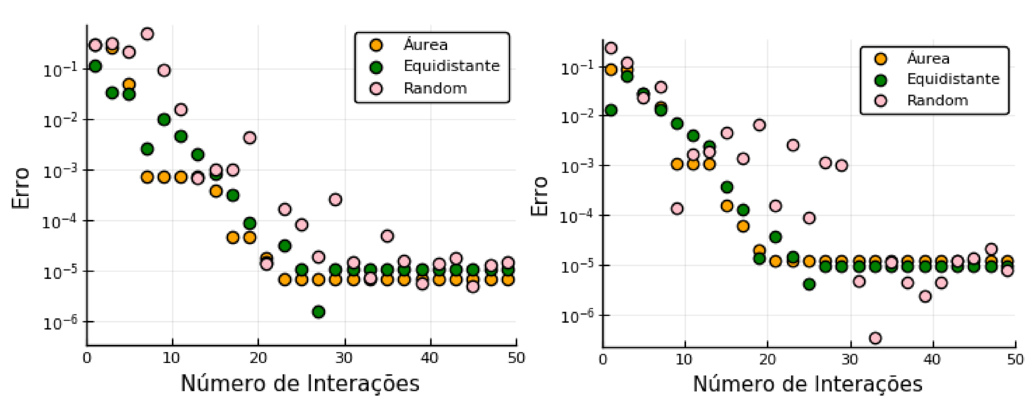

Figura 6: *Erro e iteração da a(x) e b(x)*

Como foi constatado na tabela, o erro absoluto da b(x) no Método da Seção Áurea tem uma leve diferença em comparação com os outros e na função a(x) é notável seu melhor desempenho.

4. Considerações finais

O método da Seção Áurea encontra mínimo de funções unimodais. Nosso objetivo foi mostrar como a proporção utilizada é eficiente. Obtemos como resultado que em comparação com a proporção Equidistante e a proporção Aleatória, a Áurea não atingiu resultados numéricos satisfatórios nos casos apresentados, ou seja, os três métodos vão encontrar o mínimo com precisão semelhante. Entretanto, por conta de sua eficiência nas iterações, o gasto computacional será menor fazendo com que o método ainda assim seja melhor que os demais, em geral. Tais resultados podem ser visíveis nas tabelas e gráficos apresentados.

Referências

[1] FERNANDES, F. M. **Velocidade de convergência de métodos de otimização e irrestrita**. UFPR, 2010.

[2] KARAS, E.W. e RIBEIRO, A. A. **Otimização contínua: Aspectos teóricos e computacionais**, São Paulo: Cengage Learning, 2017.