Corpos locais: Um encanto à primeira vista

Crislaine Kuster

Universidade Federal do Espírito Santo

crislainekeizy@gmail.com

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Resumo

Nesta apresentação estudaremos os corpos locais, que são, quaisquer extensão de corpos finita de $\mathbb{Q}_p$, o corpo dos números p-ádicos, ou $\mathbb{F}_p((t))$, o corpo das séries de potências de Laurent. Em seguida, definiremos uma métrica nesses corpos, e com isso interpretaremos as somas infinitas como séries convergentes nesta métrica, e analisaremos suas propriedades.

Introdução

Os corpos locais foram introduzidos por Kurt Hensel em 1897, o qual buscava técnicas e ideias para resolver problemas em teoria dos números. A partir daí, eles foram aplicados em diversas outras áreas, como geometria algébrica, teoria de representação, álgebras de divisão e formas quadráticas.

Objetivos

Nosso objetivo será caracterizar as extensões finitas de $\mathbb{Q}_p$ e $\mathbb{F}_p((t))$, ou seja, os corpos locais. Primeiramente estudaremos as extensões quadráticas em $\mathbb{Q}_p$ e por fim veremos um resultado que nos permitirá concluir que em geral um corpo local L possui estrutura similar a $\mathbb{Q}_p$ ou a $\mathbb{F}_p((t))$.

Para começar...

Seja p um número primo, o corpo dos números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$ é o conjunto dos números α representados por:

$$\alpha = a_{n_0}p^{n_0} + a_{n_0+1}p^{n_0+1} + \cdots + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots ,$$

com $0 \leq a_i < p \ \forall i \geq n_0$ e $n_0 \in \mathbb{Z}$. Assim, veja que somar em $\mathbb{Q}_p$ é um pouco diferente, por exemplo, observe a seguinte soma em $\mathbb{Q}_2$:

$$1 + (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots) = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \cdots$$
$$= 2^3 + 2^3 + 2^4 + \cdots = \cdots = 0$$

A métrica p-ádica

Definimos a norma p-ádica em $\mathbb{Q}_p$ por $\|\alpha\|_p = p^{-v(\alpha)}$ para $\alpha \in \mathbb{Q}_p$.
Onde, v é a valorização p-ádica, definida por $v : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{Z}\bigcup\{\infty\}$

$$\alpha \mapsto min\{n \in \mathbb{Z}\,;\, a_n \neq 0\}\,, \ \text{se } \alpha \neq 0 \text{ e } v(0) = \infty.$$

Com isso, podemos decompor $a \in \mathbb{Q}_p$ por

$$a = p^n \cdot u \ \mid u \in \mathbb{Q}_p^{\times} \ \text{(os inversíveis em } \mathbb{Q}_p\text{)}\,,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Note que, analogamente, podemos definir uma métrica em $\mathbb{F}_p((t))$, o conjunto dos elementos da forma

$$a_{n_0}t^{n_0} + \cdots + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \ , \text{ com } n_0 \in \mathbb{Z} \text{ e } a_i \in F_p \ \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Desse modo, trabalhando nessas definições, podemos concluir:

Proposição 01: *Seja $a \in \mathbb{Z}_p$, então a é um quadrado perfeito se, e só se, n é par e u $(mod\ p)$ é um quadrado perfeito em $\mathbb{F}_p$.*

Proposição 02: *Sejam $u, v \in \mathbb{Z}_p^{\times}$ e se $u\, mod\, p \notin \mathbb{F}_p^2$ então teremos:* $v\, mod\, p \in \mathbb{F}_p^2 \Longleftrightarrow u \cdot v\, mod\, p \notin \mathbb{F}_p^2$.

Resultados

Proposição: Existem apenas 3 extensões quadráticas em $\mathbb{Q}_p$, $p \geq 3$.

Demonstração. De fato, defina a relação de equivalência $\circledast$: $a \circledast b \Longleftrightarrow a \cdot b \in (\mathbb{Q}_p)^2$

Daí se $a = p^n \cdot v \in \mathbb{Q}_p$ onde $v \in \mathbb{Q}_p^{\times}$. Com as proposições 01 e 02, concluímos que:

- Se n for par e $(v\, mod\, p) \in \mathbb{F}_p^2$ teremos que $a \in \overline{1}$.
- Se n é impar e $(v\, mod\, p) \in \mathbb{F}_p^2$ teremos que $a \in \overline{p}$.
- Se n é par e $v\, mod\, p) \notin \mathbb{F}_p^2$ teremos que $a \in \overline{u}$.

Segue que

$$\mathbb{Q}_p \diagup \circledast = \{\overline{1}, \overline{p}, \overline{u}, \overline{up}\,;\ \text{onde } (u\, mod\, p) \notin \mathbb{F}_p^2\}.$$

Com isso, definimos um homomorfismo $\Psi : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p \diagup \circledast$

$$a = p^n v \longmapsto \begin{cases} \overline{1} & Se\ \ n = 2k, k \in Z\ e\ (v\, mod\, p) \in \mathbb{F}_p^2 \\ \overline{p} & Se\ \ n = 2k+1,\ k \in Z,\ e(v\, mod\, p) \in \mathbb{F}_p^2 \\ \overline{u} & Se\ \ n = 2k, k \in Z,\ e\ (v\, mod\, p) \notin \mathbb{F}_p^2 \end{cases}$$

Desse modo o núcleo de Ψ é $\mathbb{Q}_p^2$ e com isso $\frac{\mathbb{Q}_p}{\mathbb{Q}_p^2} \simeq \{\overline{1}, \overline{p}, \overline{u}, \overline{pu}\}$.
Portanto, temos as seguintes extensões quadráticas em $\mathbb{Q}_p$:

$$\mathbb{Q}_p(\sqrt{u}),\ \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}),\ \mathbb{Q}_p(\sqrt{pu}) \ \text{ com } (u\, mod\, p) \notin F_p^2.$$

$\square$

Teorema da Valorização Highlander

Teorema. *Dado K um corpo completo avaluado discretamente com uma valorização v e L uma extensão finita de K. Então existe uma única valorização w em L extendendo v, dada por*

$$w(x) = \frac{1}{[L:K]} \cdot v(N_{L/K}(x)) \qquad \textit{para } x \in L$$

Demonstração. Sejam A o anel de valorização de K, i.e., $A = \{x \in K\,; v(x) \geq 0\}$ e B o fecho integral de A em L.

✓ O anel de valorização de L é

$$B = \{x \in L\,;\, N_{L|K}(x) \in A\} = \{x \in L; v(N_{L|K}(x)) \geq 0\} \quad (*)$$

De fato, sejam $x \in L$ com $N_{L|K}(x) \in A$ e $f(t) = t^n + \cdots + a_0 \in K[t]$ seu polinômio minimal, podemos verificar que

$$v(a_0) \geq 0 \iff a_0 \in A,$$

e que, com isso, $f(t) \in A[t]$, daí segue que $x \in B$. Reciprocamente, como A é um DFU, A é normal e portanto $N_{L|K}(b) \in A \ \ \forall\ b \in B$.

✓ w é uma valuação (com anel de valorização B), i.e., dados $x, y \in L$:

1. $w(xy) = w(x) + w(y)$.
2. $w(x) = \infty \iff x = 0$.
3. $w(x+y) \geq min\{w(x), w(y)\}$ (detalharemos o item 3):

Com efeito, por $(*)$ temos que $w(x) \geq 0 \Longrightarrow w(x+1) \geq 0$ pois

$$w(x) \geq 0 \Longrightarrow x \in B \Longrightarrow 1 + x \in B \Longrightarrow w(1+x) \geq 0.$$

Assim, se $w(x) \geq w(y)$, pelo item (1) temos que $w(x/y) \geq 0$.
Daí $(*)$ certifica que $w(1 + x/y) \geq 0$ e pelo item (1) novamente

$$w(1 + x/y) + w(y) \geq w(y) \Longrightarrow w(x+y) \geq w(y).$$

✓ Por fim, w é única. Segue do fato de que se duas valorizações diferentes w e w' estendendo v então elas não serão equivalentes. $\square$

Conclusão

Corpos locais possuem propriedades valiosas e interessantes refletindo em sua grande aplicabilidade. Ademais a área geometria-algébrica-aritmética é ampla e possui referências mundiais em sua pesquisa, por exemplo, o matemático Peter Scholze, contemplado com a medalha Fields no ICM-2018.

Referências

[1] TENGAN E. , *An Invitation to Local Fields*, notas de minicurso-Groups, Rings and Group Rings (Ubatuba-São Paulo, 2008).

[2] BORGES, H. TENGAN, E., *Algebra comutativa em quatro movimentos*, IMPA,2015.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Renato Fehlberg Jr. pelo apoio e sua grande dedicação em nossos estudos e também ao CNPq pelo apoio financeiro.