Uma Abordagem Alfabética da Conjectura de Nivat

Cleber F. Colle & Eduardo Garibaldi

Instituto de Ciência e Tecnologia - Universidade Federal de São Paulo

cleber.colle@unifesp.br, garibaldi@ime.unicamp.br

UNIFESP 25 ANOS

Universidade pública, conhecimento público

Introdução

Fixado um alfabeto finito A, para cada inteiro $n \in \mathbb{N}$, a n-complexidade de uma sequência infinita $\xi = (\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}$ é definida como sendo o número de palavras distintas da forma $\xi_j\xi_{j+1}\cdots\xi_{j+n-1}$ ocorrendo em ξ. Em 1938, Morse e Hedlund [8] provaram um dos resultados mais célebres em dinâmica simbólica, que estabelece uma conexão entre sequências periódicas (sequências em que existe $m \geq 1$ tal que $\xi_{i+m} = \xi_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$) e complexidade. Denotando por $P_\xi(n)$ a n-complexidade de ξ, Morse e Hedlund provaram que $\xi \in A^{\mathbb{Z}}$ é periódica se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P_\xi(n) \leq n$.

Uma extensão natural da função complexidade para altas dimensões é obtida ao considerar, no lugar de palavras, hiper-retângulos de símbolos, i.e., a $(n_1 \times \cdots \times n_d)$-complexidade de uma configuração $\eta = (\eta_g)_{g\in\mathbb{Z}^d} \in A^{\mathbb{Z}^d}$ é o número de motivos distintos de tamanho $n_1 \times \cdots \times n_d$ ocorrendo em η. Com relação à periodicidade, uma extensão natural para altas dimensões é dizer que η é periódica quando existir um vetor $h \in (\mathbb{Z}^d)^*$ tal que $\eta_{g+h} = \eta_g$ para todo $g \in \mathbb{Z}^d$.

Denotando por $P_\eta(n_1, \ldots, n_d)$ a $(n_1 \times \cdots \times n_d)$-complexidade de $\eta \in A^{\mathbb{Z}^d}$, a conjectura de Nivat [9] é apenas a generalização natural do Teorema de Morse-Hedlund para o caso bidimensional.

Conjectura de Nivat (1997). *Dado $\eta \in A^{\mathbb{Z}^2}$, se existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(n,k) \leq nk$, então η é periódica.*

A Conjectura de Nivat tem sido intensivamente estudada nos últimos 16 anos. O primeiro passo na direção de uma prova para a conjectura foi dado por Sander e Tijdeman [11]: eles mostraram que se $P_\eta(n,2) \leq 2n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $\eta \in A^{\mathbb{Z}^2}$ é periódica. Sander e Tijdeman [12] também deram contra-exemplos do análogo da Conjectura de Nivat em altas dimensões, i.e., eles mostraram que, para $d \geq 3$, existem configurações aperiódicas $\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ tais que

$$P_\eta(n, \ldots, n) = 2n^{d-1} + 1.$$

Seja $\eta \in A^{\mathbb{Z}^2}$ e suponha que existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(n,k) \leq nk/C$. Foi provado que η é periódica para $C = 144$ em [5] e para $C = 16$ em [10].

O melhor resultado conhecido até 2017 foi obtido por Bryna Kra e Van Cyr [4]. Usando a noção de subespaços expansivos introduzida por Boyle e Lind, eles lançaram uma nova luz na direção de uma prova para a Conjectura de Nivat ao relacionarem subespaços não-expansivos à periodicidade. Em particular, eles provaram que se existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que

$$P_\eta(n,k) \leq \frac{1}{2}nk,$$

então $\eta \in A^{\mathbb{Z}^2}$ é periódica.

Nossas Contribuições

Nosso resultado principal [2] é um melhoramento alfabético do resultado de Bryna Kra e Van Cyr. Nós consideramos a função complexidade com respeito a uma classe de conjuntos mais geral do que retângulos, chamados conjuntos quase-regulares. No caso particular de retângulos, nós provamos que, para uma configuração $\eta \in A^{\mathbb{Z}^2}$ contendo todas as letras de A, se existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que

$$P_\eta(n,k) \leq \frac{1}{2}nk + |A| - 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{|A|-1}{nk}\right)nk, \qquad (1)$$

onde $|A|$ denota a cardinalidade do alfabeto A, então η é periódica.

Aqui está um exemplo de configuração que satisfaz (1) mas não satisfaz a condição do Teorema de Kra-Cyr. Seja A o alfabeto formado pelas cores "branco" e "vermelho" e defina $\eta \in A^{\mathbb{Z}^2}$ como $\eta_g :=$ "vermelho" se $g = (a,a) + b(\sum_{i=6}^{c} i, 0)$, onde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \{-1,0,1\}$ e $c \geq 6$, e $\eta_g :=$ "branco" caso contrário. Note que

$$P_\eta(n,k) = n + k$$

para $n + k \leq 7$ e que, das simetrias dessa configuração,

$$P_\eta(n,k) = n + k + \frac{1}{2}(n+k-7)(n+k-6)$$

para $n + k > 7$. Não é difícil verificar que não existem $n, k \in \mathbb{N}$ tais que $P_\eta(n,k) \leq \frac{1}{2}nk$. Contudo, $P_\eta(3,4) = 7 = \frac{1}{2}\cdot 12 + |A| - 1$.

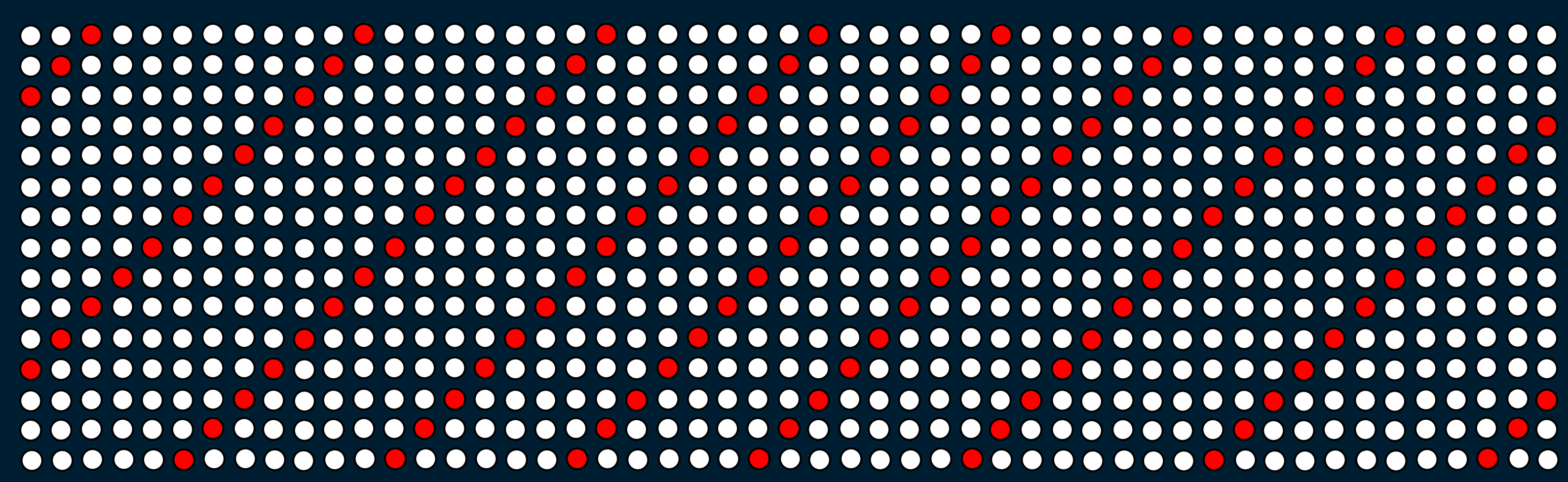

Figura 1: Representação da configuração η.

Referências

[1] Boyle, M., Lind, D.: Expansive Subdynamics. Trans. Amer. Math. Soc. **349**(1), 55-102 (1997).

[2] Colle, C. F., Garibaldi, E.: An Alphabetical Approach to Nivat's Conjecture. Preprint arXiv:1904.04897.

[3] Cassaigne, J.: Subword Complexity and Periodicity in Two or More Dimensions. Developments in Language Theory. Foundations, Applications and perspectives ($DLT'99$), Aachen, Germany, World Scientific, Singapore, 14-21 (2000).

[4] Cyr, V., Kra, B.: Nonexpansive $\mathbb{Z}^2$-Subdynamics and Nivat's Conjecture. Trans. Amer. Math. Soc. **367**, 6487-6537 (2015).

[5] Epifanio, C., Koskas, M., Mignosi, F.: On a Conjecture on Bidimensional Words. Theor. Comput. Sci. **299**, 123-150 (2003).

[6] J. Cassaigne. A counterexample to a conjecture of Lagarias and Pleasants. 2006

[7] Kari, J., Szabados, M.: An Algebraic Geometric Approach to Nivat's Conjecture. Lecture Notes in Comput. Sci. **9135**, 273-285 (2015).

[8] Morse, M., Hedlund, G. A.: Symbolic Dynamics. Amer. J. Math. **60**, 815-866 (1938).

[9] Nivat, M.: Invited Talk at ICALP. Bologna, (1997).

[10] Quas, A., Zamboni, L.: Periodicity and Local Complexity. Theor. Comput. Sci. **319**, 229-240 (2004).

[11] Sander, J., Tijdeman, R.: The Rectangle Complexity of Functions on TwoDimensional Lattices. Theor. Comp. Sci. **270**, 857-863 (2002).

[12] Sander, J., Tijdeman, R.: The Complexity Function on Lattices. Theor. Comput. Sci. **246**, 195-225 (2000).

Agradecimentos

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.