# Continuidade $L^\infty(\mathbb{R}^n) - BMO(\mathbb{R}^n)$ de operadores de Calderón-Zygmund fortemente singular


## Claudio Henrique Machado Vasconcelos Filho [1]
## Orientador: Prof. Tiago Henrique Picon [2]

Universidade Federal de São Carlos [1] Universidade de São Paulo - Ribeirão Preto[2]

claudio_vasconcelos@live.com


### Introdução

Em Análise Harmônica, as principais propriedades do espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$ são que $(H^1(\mathbb{R}^n))^* = BMO(\mathbb{R}^n)$, no qual $H^1(\mathbb{R}^n)$ representa o espaço de Hardy para $p = 1$ e também o fato de representar um potencial substituto para o espaço $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ no estudo da continuidade de certos operadores.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração, devida a Alvarez e Milman em [1], sobre a continuidade $L^\infty(\mathbb{R}^n) - BMO(\mathbb{R}^n)$ de uma classe de operadores do tipo CZ, conhecidos por operadores de Calderón-Zygmund fortemente singular.

### O espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$

**Definição 1.** *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e denote por $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)dx$ a média de $f$ em uma bola qualquer $B \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ se*

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B|dx \leq A, \quad \forall\, B \subset \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

*Definimos a norma $\|\cdot\|_{BMO}$ como sendo a menor constante $A$ que satisfaz a desigualdade (1).*

**Exemplo 1.** *$L^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq BMO(\mathbb{R}^n)$ e a recíproca não é válida pois $f(x) = \log|x| \in BMO(\mathbb{R}^n)$ mas não pertence a $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Equivalentemente podemos definir $BMO(\mathbb{R}^n)$ por meio da função maximal *sharp*. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, defina

$$M^\# f(x) := \sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - f_B|dy,$$

no qual o supremo é tomado sobre todas as bolas (ou cubos) que contém $x$. Dizemos que $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ se $M^\# f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_{BMO} = \|M^\# f\|_\infty$.

**Proposição 1.** *Se $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leq \sup_B \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - a|dx \leq \|f\|_{BMO}.$$

Assim, podemos dizer que $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ se e somente se existe uma constante $a_B$ tal que

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - a_B|dx \leq C$$

uniforme em $B$.

### Operadores de Calderón-Zygmund do tipo Fortemente Singular

Motivados pelo operador multiplicador cujo símbolo é dado por $e^i|\xi|^a/|\xi|^\beta$ e resultados de Fefferman e Stein em [3], Alvarez e Milman em [1] definiram de forma geral os operadores de Calderón-Zygmund do tipo fortemente singular.

**Definição 2.** *Seja $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ um operador linear e contínuo. Dizemos que $T$ é um operador de Calderón-Zygmund do tipo fortemente singular quando:*

*(i) $T$ se estende a um operador contínuo em $L^2(\mathbb{R}^n)$;*

*(ii) Formalmente $T$ pode ser representado para $f \in L^2_c(\mathbb{R}^n)$ por*

$$Tf(x) := \int K(x,y)f(y)dy, \quad x \notin supp(f)$$

*no qual $K(x,y) \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta)$ tal que*

$$|K(x,y) - K(x,z)| + |K(y,x) - K(z,x)| \leq C\frac{|y-z|^\delta}{|x-z|^{n+\delta/\alpha}}$$

*para algum $0 < \delta \leq 1$, $0 < \alpha < 1$ e $|x - z| \geq 2|y - z|^\alpha$.*

*(iii) Para algum $(1-\alpha)n/2 \leq \beta < n/2$, os operadores $T$ e $T^*$ são estendidos continuamente de $L^q(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ para $1/q = 1/2 + \beta/n$.*

**Exemplo 2.** *A classe de operadores Pseudo-diferenciais $OpS^{-b}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ no qual $0 < \delta \leq \rho < 1$ e $(1-\rho)n/2 \leq b < n/2$ são operadores de Calderón-Zygmund do tipo fortemente singular.*

**Teorema 1.** *Seja $T$ um operador de Calderón-Zygmund do tipo fortemente singular. Então $T$ se estente a um operador limitado de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $BMO(\mathbb{R}^n)$.*

*Demonstração.* Seja $B = B(z,r) \subset \mathbb{R}^n$. Mostraremos que existe uma constante $C_B$ tal que

$$\frac{1}{|B|}\int_B |Tf(x) - C_B|dx \leq C\,\|f\|_\infty. \tag{2}$$

Suponha $r \leq 1$. Denote por $B^\alpha = B(z, 2r^\alpha)$ e $f = f_1 + f_2$, no qual $f_1 = f\chi_{B^\alpha}$ e $f_2 = f\chi_{(B^\alpha)^c}$. De (iii) temos que $T$ é um operador contínuo de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ no qual $1/q' = 1/2 - \beta/n$. Assim, para $f_1$ temos

$$\begin{aligned}\int_B |Tf_1(x)dx| &\leq \|Tf_1\|_{q'} \cdot |B|^{1/q} \\ &\leq C\,\|f_1\|_2 \cdot |B|^{1/q} \\ &\leq C\,\|f\|_\infty \cdot |B|^{\alpha/2+1/q}.\end{aligned}$$

Como $r \leq 1$ e $\alpha/2 + 1/q - 1 \geq 0$, então

$$\frac{1}{|B|}\int_B |Tf_1(x)|dx \leq C\,\|f\|_\infty. \tag{3}$$

Para $f_2$ note que se $|y - z| > 2r^\alpha$ e $|x - z| < r$, então $|y - z| > 2|x - z|^\alpha$ e podemos fazer uso da estimativa pontual (ii) do núcleo para obter que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y) - K(z,y)||f_2(y)|dy \leq C\,\|f\|_{L^\infty}. \tag{4}$$

Considere $C_B = Tf_2(z)$. De (4) obtemos

$$\begin{aligned}\int_B |Tf_2(x) - C_B|dx &= \int_B\int |K(x,y) - K(z,y)||f_2(y)|dydx \\ &\leq C\,\|f\|_\infty |B|.\end{aligned} \tag{5}$$

De (3) e (5) obtemos (2). A demonstração para $r > 1$ segue de forma análoga decompondo a função $f$ em $B^* = B(z, 2r)$ e $\mathbb{R}^n\backslash B^*$. □

### Referências


[1] J. Alvarez and M. Milman. $H^p$ Continuity Properties of Calderón-Zygmund-type Operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 118:63–79, 1986.

[2] J. Duoandikoetxea. *Fourier Analysis*. American Mathematical Society, 2000.

[3] C. Fefferman and E. M. Stein. $H^p$ Spaces of Several Variables. *Acta Math*, 129:137–193, 1972.


### Agradecimentos


À Capes pelo apoio financeiro.