Medidas de Alta Entropia para Difeomorfismos Parcialmente Hiperbólicos em $\mathbb{T}^4$

Carlos Fabián Álvarez

IMECC-Universidade Estadual de Campinas

ra180511@ime.unicamp.br

Resumo

Nós estudamops medidas ergódicas para certos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos em $\mathbb{T}^4$ cuja folheação central é bidimiensional e obtemos um resultado similiar ao de Tahzibi-Yang, mostrando que cada difeomorfismo de classe C^2 com todas as folhas centrais compactas as medidas ergódicas com alta entropia são hiperbólicas. Além disso, garantimos que no máximo existe uma quantidade enumerável de medidas ergódicas hiperb'olicas de máxima entropia.

Introdução

Vamos considerar $f : \mathbb{T}^4 \to \mathbb{T}^4$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^2 com $\dim E^c_f = 2$ e todas as folhas centrais compactas. Suponha que f é homotópico a $A^2 \times A : \mathbb{T}^4 \to \mathbb{T}^4$ ao longo de caminhos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, onde $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ é um Anosov linear.

Problema: Queremos saber quantas medidas de máxima entropia admite o difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : \mathbb{T}^4 \to \mathbb{T}^4$ com as condições de acima.

Resultados Conhecidos

Teorema 0.1. *(Franks)*
Seja $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ um difeomorfismo homotópico ao automorfismo hiperbólico $A : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$. Então existe uma função contínua sobrejetora $h : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ homotópica a identidade tal que $A \circ h = h \circ f$.

Teorema 0.2. *(Fisher-Potrie-Sambarino)*
Se $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico isotópico a um Anosov linear A ao longo de caminhos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, então f é dinamicamente coerente. Além disso, para cada $x \in \mathbb{T}^d$, $\mathcal{F}^c(x) = h^{-1}[\mathcal{W}^c_A(h(x))]$.

Teorema 0.3. *[1](S. Ben Ovadia)*
Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe $C^{1+\beta}$ em M sem bordo de dimensão maior que um. Então f possui no máximo uma quantidade enumerável de medidas ergódicas hiperbólicas de máxima entropia.

Como em Tazhibi-Young consideramos um difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : M \to M$ de classe C^2 satisfazendo as condições:

- H1. f é dinamicamente coerente com todas as folhas centrais compactas.
- H2. f admite holonomias globais
- H3. f_c é um homeomorfismo de Anosov topologicamente transitivo, onde $f_c : M/\mathcal{F}^c \to M/\mathcal{F}^c$ é a dinâmica satisfazendo $f_c \circ \pi = \pi \circ f$ e $\pi : M \to M/\mathcal{F}^c$ a projeção ao espaço das folhas centrais.

Definição 0.4. *(Entropia Parcial)*
Seja μ uma medida f-invariante. Definimos a entropia parcial de f ao longo da folheação instável $\mathcal{F}^u$ por

$$h_\mu(f, \mathcal{F}^u) = H_\mu(f^{-1}\xi^u | \xi^u) = \int_M -\log \mu^u_z(f^{-1}\xi(z)) d\mu(z),$$

onde ξ^u é uma partição μ-adaptada para a folheação $\mathcal{F}^u$.

Teorema 0.5. *(Tahzibi-Yang)*
Seja f um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^2 satisfazendo as condições H1, H2, H3. Suponha que μ é uma probabilidade f-invariante, então $h_\mu(f, \mathcal{F}^u) \leq h_{\pi_*\mu}(f_c)$.

Proposição 0.6. *Se μ é uma probabilidade ergódica f-invariante e todos seus expoentes centrais são não-positivos μ-quase sempre, então $h_\mu(f) = h_{\pi_*\mu}(f_c)$.*

Teorema 0.7. *(Resultado Principal)*
Seja $f : \mathbb{T}^4 \to \mathbb{T}^4$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico de classe C^2 com $\dim E^c_f = 2$ e todas as folhas centrais compactas. Suponha que f é homotópico a $A^2 \times A : \mathbb{T}^4 \to \mathbb{T}^4$ ao longo de caminhos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, onde $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ é um Anosov linear. Então:

1. *Se μ é uma medida ergódica de máxima entropia, então μ é hiperbólica. Além disso, f no máximo possui uma quantidade enumerável de medidas ergódicas hiperbólicas de máxima entropia.*
2. *Para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto hiperbólico $B_\epsilon \subset M$ tal que $h_{top}(f|B_\epsilon) > h_\mu(f) - \epsilon$.*

Referências

[1] S. Ben Ovadia, Symbolic dynamics for non-uniformly hyperbolic diffeomorphisms of compact smooth manifolds, Journal of Modern Dynamics, 13: 43-113, 2018.

[2] T. Fisher, R. Potrie and M. Sambarino. Dynamical coherence for partially hyperbolic diffeomorphisms of tori isotopic to Anosov, Mathematische Zeitchcrift 278: 149-168, 2014.

[3] F. Rodriguez-Hertz, J. Rodriguez-Hertz and R. Ures, Partially hyperbolic dynamics, 28 Colóquio Brasileiro de Matemática, Publicações Impa ISBN: 978-85-244-330-9, 2011.

[4] A. Tahzibi and J. Yang, Invariance principle and rigidity of high entropy measures, Transactions of the American Mathematical Society, 371: 1231-1251, 2019.

Agradecimentos

Gostaria agradecer de uma forma especial ao Rafael Potrie pelas suas sugestões e conversas que tivemos ao longo das minhas visitas ao Centro de Matemática da Universidad de la República em Montevideu.