ANÁLISE QUALITATIVA LOCAL DO SISTEMA DE RÖSSLER

Caio Augusto S. Magalhães & Rodrigo Donizete Euzébio (Orientador)

IME-UFG

caioaugusto.sm@gmail.com

FAPEG
Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás

Introdução

Neste trabalho serão utilizados resultados clássicos da teoria qualitativa de sistemas dinâmicos, isto com o intuito de analisar localmente o comportamento do sistema de Rössler. Serão considerados alguns parâmetros específicos na análise do sistema, e com isto serão determinados os pontos de equilíbrio do mesmo, bem como sua natureza. Em seguida será feita a linearização do sistema na vizinhança dos pontos de equilíbrio hiperbólicos. Por fim, o teorema de Grobman-Hartman será considerado para legitimar a análise realizada no sistema.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais obtida por Rössler:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b - cz + xz. \end{aligned}$$

Na figura 1 é apresentado a dinâmica para o atrator de Rössler com $a = b = 0.2$ e $c = 5.7$.

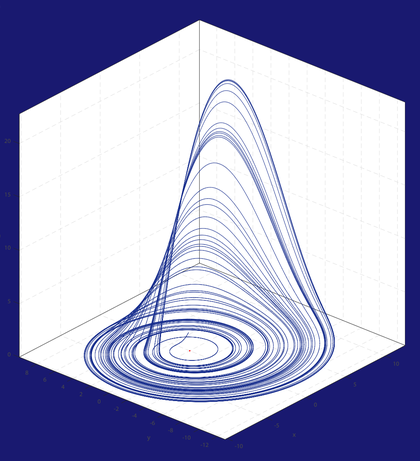

Figura 1: Atrator de Rössler

Estudos dos Pontos de Equilíbrios

Definimos ponto crítico ou ponto de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}, f \in C^1(U), U \in \mathbb{R}^n$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$ como um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_0) = 0$. Portanto, se igualarmos o sistema a zero temos

$$\begin{aligned} -y - z &= 0 \\ x + ay &= 0 \\ b - cz + xz &= 0. \end{aligned}$$

encontramos dois pontos equilíbrio:

$$P_0 = \left(\frac{c - \sqrt{-4ab + c^2}}{2}, \frac{-c + \sqrt{-4ab + c^2}}{2a}, \frac{c - \sqrt{4ab + c^2}}{2a}\right)$$
$$P_1 = \left(\frac{c + \sqrt{-4ab + c^2}}{2}, \frac{c + \sqrt{-4ab + c^2}}{2a}, \frac{c + \sqrt{4ab + c^2}}{2a}\right)$$

Apoś encontrar os pontos de equilíbrio, partimos para descrever o comportamento em sua vizinhança.

Um ponto de equilíbrio x_0 do sistema de equações diferenciais $\dot{x} = f(x)$ é dito Hiperbólico se nenhum dos autovalores da matriz Jacobiana $Df(x_0)$ com $x_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$, tem parte real nula.

O sistema linear

$$\dot{X} = AX$$

com $A = Df(x_0)$ é chamado de linearização de $\dot{X} = f(x)$ no ponto x_0.

Lineariza do Sistema de Rössler

A matrix jacobiana do sistema do por

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & -c + x \end{pmatrix}.$$

Agora, calculemos os autovalores das respectivas matrizes, e vamos analisar seus respectivos pontos críticos. Para uma simplificação nos cálculos, iremos atribuir valores convenientes para as constantes, esses valores são de suma importância agora, pois com esses parâmetros o sistema irá gerar caos, e também temos que mais a frente, todos os seus pontos de equilíbrios serão hiperbólicos, sendo assim temos $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$, e os pontos $P_0 = (0.0070262, -0.035131, 0.035131)$ e $P_1 = (5.69297, -28.4649, 28.4649)$ esses valores se encontram em um exemplo de [2]. Para encontrar os autovalores com a, b, c dados, temos que resolver o seguinte polinômio característico de grau três

$$-\lambda^3 + \lambda^2(a + x - c) + \lambda(ac - ax - 1 - z) + x - c + az = 0$$

suas raízes serão

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -5.68698 \\ \lambda_2 &= 0.0970009 - 0.995193i \\ \lambda_3 &= 0.0970009 + 0.995193i. \end{aligned}$$

Observe que todas as raízes tem parte real não nula e, portanto podemos utilizar o seguinte teorema

Teorema de Gobman-Hartman

Seja E um subconjunto aberto no $\mathbb{R}^n$ contendo a origem, com $f \in C^1(E)$, e ϕ_t o fluxo do sistema ninear $= f(x)$. Suponha que $f(0) = 0$ e se a matriz $A = Df(0)$ tenha autovalores com a parte real nula. Então existe um homeomorfismo H do conjunto aberto U contendo a origem no conjunto aberto V contendo a origem tal que para cada $x_0 \in U$ h intervalo aberto $I_0 \subset \mathbb{R}$ contendo o zero, tal que para todos os $x_0 \in U$ e $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0)$$

isto é, H mapeia as tragetórias do sistema não linear perto da origem e leva no sistema linear próximo da origem e preserva a orientação do tempo.

Portanto, o Atrator de Rösller é topológicamente equivalente ao sistema linearizado na vizinhança dos pontos P_0 e P_1, no caso linearizado próximo da origem, temos um foco repulsor no pano yz e no eixo x um autoespaço atrator representado pela figura:

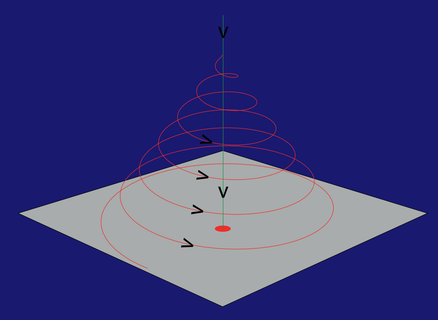

Figura 2: Lineariza do sistema em P_0

Na figura [1], temos o retrato de fase do sistema para os parâmetros, $a = b = 0.2$ e $c = 5.7$, veja a seguir o seguinte retrato de fase para diferentes parâmetros e perceba a mudança no comportamemto do sistema.

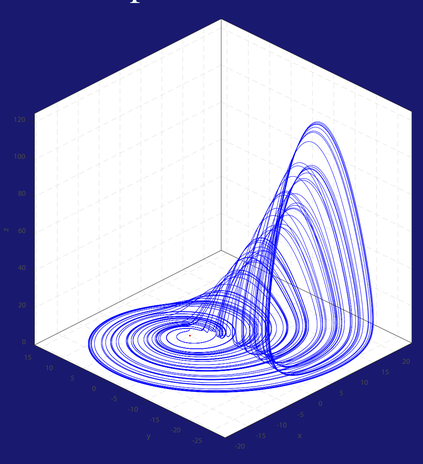

Figura 3: Atrator para os parâmetros: $a = 0.39, b = 1, c = 10$

Conclusão

Com o objetivo de utilizar os resultados clássicos da teoria de sistema dinâmicos foi feita a análise local do sistema de Rössler, mostrando que mesmo em um sistema não linear, sob determinadas hipóteses é possível descrever seu comportamento na vizinhança de seus pontos críticos. Concluímos assim que em uma vizinhança de um sistema na qual é insolúvel quantitativamente, foi possível obter uma solução de caráter qualitativo em um pequeno intervalo utilizando teoremas e ferramentas topológicas.

Referências

[1] description O. Rossler, ?An equation for continuous chaos,? Physics Letters A, vol. 57, pp. 397?398, 07 1976.

[2] R. L. D. Morris W.Hirsch, Stephen Smale, Dfferential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos.

[3] L. Perko, Differential equations and dynamical systems.