Ponto Fixo de Banach e Aplicações

Bianca Elena Wiltuschnig & Prof. Dr. Hudson do Nascimento Lima (Orientador)

Universidade Federal do Paraná

bianca.elena.w@gmail.com, hudsonlima@ufpr.br

impa

Instituto de Matemática
Pura e Aplicada

Resumo

Se pensarmos em um número qualquer em radianos e calcularmos o seu cosseno sucessivamente, obtemos o número 0,739085, não importando o número inicial considerado. Por que isso acontece?
A resposta para essa pergunta provém do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que nos fornece mais algumas aplicações interessantes.

Teorema do Ponto Fixo de Banach

Teorema 1. *Considere (M, d) um espaço métrico completo e uma contração $f : M \longrightarrow M$. Então f possui um único ponto fixo.*

Ideia da Demonstração. A ideia para demonstrar o Teorema é fixar $x_0 \in M$ e provar que a sequência $\{x_n\}$, definida por $x_{n+1} = f(x_n)$, é de Cauchy, logo converge para um ponto fixo de f (pois M é espaço métrico completo). Além disso, se p é ponto fixo de f, então p é o único ponto fixo de f. □

Método de Newton

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função na qual desejamos determinar um zero. O Método de Newton consiste em construir uma sequência $\{x_n\}$ na qual conseguimos expressar x_{n+1} em função de x_n. Começando com um valor inicial x_0 próximo da raiz, definimos x_{n+1} como a interseção da reta tangente ao gráfico de f em x_n com o eixo das abscissas. De forma resumida, a equação de recorrência da sequência é dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Podemos usar o Teorema do Ponto Fixo para garantir a convergência de $\{x_n\}$ para um zero da função. Para isso, precisamos mostrar que

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

é uma contração. Por meio das condições da proposição abaixo, conseguimos concluir tal fato.

Proposição 1. *Assuma que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é pelo menos duas vezes diferenciável, com $f'(x) \neq 0$ e $f(a)f(b) < 0$, então f possuirá uma raiz χ, única, em um dado intervalo $[a, b]$ se existir λ com $0 < \lambda < 1$ tal que*

(a) Condição de Contração:

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| \leq \lambda, \ \forall x \in [a, b].$$

(b) A imagem permanece em $[a, b]$:

$$\left|\frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right| \leq (1 - \lambda)\alpha$$

onde $\bar{x} = \dfrac{a + b}{2}$ *e* $\alpha = \dfrac{a - b}{2}$.

Nesse caso, tem-se $\chi = \lim_{n\to\infty} x_n$, onde a sequência $\{x_n\}$ é determinada iterativamente pela equação de recorrência, sendo $x_0 \in [a, b]$ arbitrário.

Teorema de Picard

Teorema 2 (Existência e Unicidade de soluções de EDOs). *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, onde U é um aberto contido em $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, uma aplicação contínua e localmente lipschitziana na segunda variável x, onde o par (t, x) é um elemento de U, com $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.*
Então o problema de valor inicial

$$(*)\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possui apenas uma solução em uma vizinhança do ponto (t_0, x_0).

Ideia da Demonstração. Observe que $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é solução de $(*)$ se, e somente se,

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \gamma(s))ds$$

(Integrando dos dois lados e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo).
A ideia é considerar γ como um ponto fixo de uma contração $\mathcal{F} : M \longrightarrow M$, onde $M = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ e

$$\mathcal{F}(\alpha)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \alpha(s))ds.$$

Restando-nos fazer uma escolha apropriada no intervalo $[a, b]$ de modo que $t_0 \in [a, b]$, $\mathcal{F}(M) \subseteq M$ e $\mathcal{F}$ seja contração. □

A função $\cos x$

Proposição 2. *A reta real, $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, é um espaço métrico completo.*

Proposição 3. *A função $\cos(x)$ não é uma contração em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $\cos(x)$ é uma contração, então $|\cos(x) - \cos(y)| \leq \lambda |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, com $0 < \lambda < 1$. Assim, fazendo $y = \frac{\pi}{2}$, temos que

$$\frac{\left|\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{2})\right|}{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|} \leq \lambda$$

Entretanto, tomando o limite do quociente obtemos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left|\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{2})\right|}{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|} = \left|\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 1.$$

Chegando em uma contradição. □

Teorema 3. *Se M é um espaço métrico completo e $f : M \longrightarrow M$ é uma função tal que alguma iterada $f^{(N)} : M \longrightarrow M$ é uma contração, então f tem um único ponto fixo. Além disso, o ponto fixo de f pode ser obtido iterando f a partir de um $x_0 \in M$ qualquer.*

Proposição 4. *A função $\cos(\cos(x)) = \cos^{(2)}(x)$ é uma contração em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Primeiro, temos que $\left|\left(\cos^{(2)}(x)\right)'\right| \leq 0,85 < 1.$ Assim, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\left|\cos^{(2)}(x) - \cos^{(2)}(y)\right| \leq 0,85\,|x - y|\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $0 < 0,85 = \lambda < 1$, concluímos que $\cos^{(2)}(x)$ é uma contração. □

Assim, como $\cos^{(2)}(x)$ é uma contração em $\mathbb{R}$ (espaço métrico completo), pelo Teorema 3 temos que $\cos(x)$ tem um único ponto fixo, obtido calculando sucessivamente o cosseno de um valor inicial qualquer em $\mathbb{R}$ (em radianos).

Conclusão

A importância do Teorema do Ponto Fixo de Banach provém da sua aplicabilidade em diversos contextos, dentre os quais análise numérica, teoria de EDO's e topologia. Além disso, para estudar o Teorema foram necessários diversos conteúdos fundamentais da Matemática, tais como topologia de espaços métricos, métricas completas e equações diferenciais, os quais são importantes para estudos futuros.

Referências

[1] BARROS, C. D. V. **O Teorema do Ponto fixo de Banach e algumas Aplicações**. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

[2] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1977.

[3] PALAIS, R. S. **A simple proof of the Banach contraction principle**. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 14 nov. 2007. Vol. 2, p. 221-223.