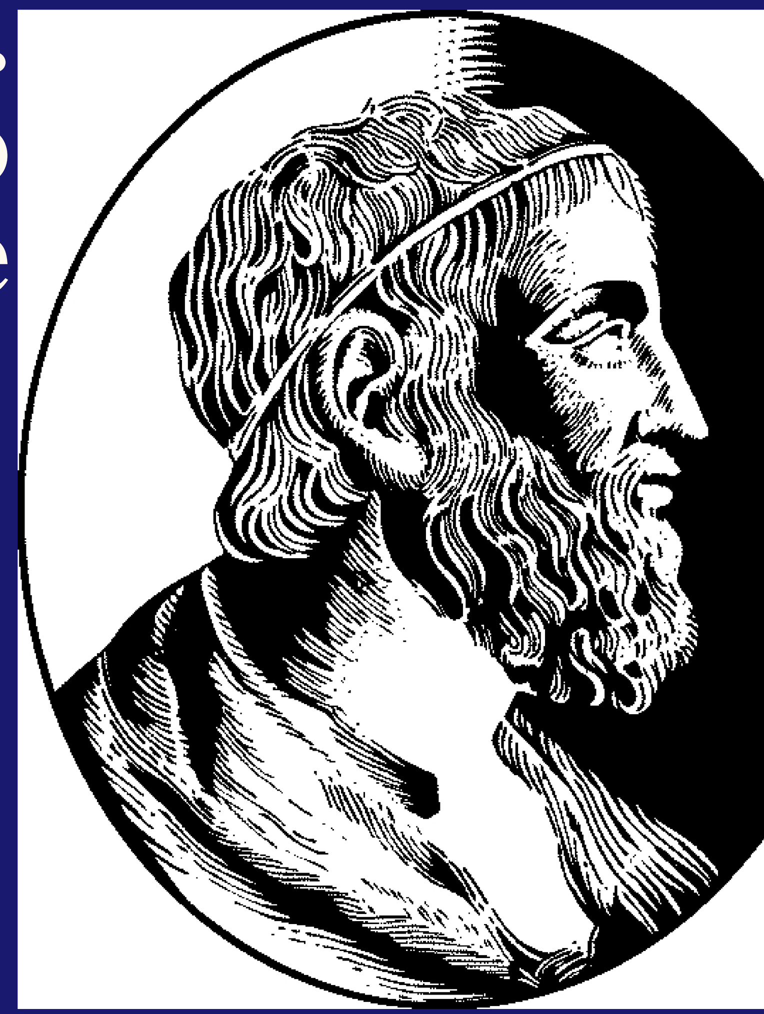
Dinâmica de Aplicações Cohomologicamente Expansíveis. Dynamical Systems and Ergodic Theory - 32º Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, Rio de Janeiro, 28 de Julho a 02 de Agosto de 2019



Armand Azonnahin
IME-USP (São Paulo)
armand@ime.usp.br
24 de abril de 2019

Agradecimentos

CAPES, CNPq, IME-USP, IMPA, UFRGS e UFSC.

Resumo

Consideremos $f : X \longrightarrow X$ uma Aplicação Cohomologicamente Expansível de uma variedade Kähleriana complexa conexa e compacta com $dim_{\mathbb{C}}(X) = k \geq 1$. Queremos estudar a dinâmica de tal aplicação de um ponto de vista probabilístico, ou seja, vamos tentar descrever o comportamento assintótico da órbita $O_f(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}\}$ de um ponto genérico.

Introdução

O principal problema no estudo dinâmico de um mapa é entender o comportamento das órbitas dos pontos sob a ação desse mapa. Exemplos simples mostram que, em geral, há um conjunto (Conjunto de Julia) onde a dinâmica é instável: as órbitas devem divergir exponencialmente. Além disso, a geometria do conjunto de Julia é em geral muito selvagem. Para estudar os sistemas dinâmicos complexos, vamos seguir os conceitos clássicos. Vamos introduzir e estabelecer propriedades básicas de alguns invariantes associados ao sistema, como a entropia topológica e os graus dinâmicos que são os análogos dos indicadores de crescimento de volume no cenário dinâmico real. Esses invariantes vão dar uma classificação aproximada do sistema. O fato notável em dinâmica complexa é que eles podem ser calculados ou estimados em muitas situações não triviais.

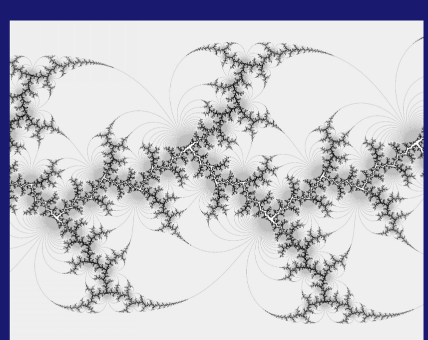


Figura 1: Exemplo de Conjunto de Julia

Objetivos

Considerando $f : X \longrightarrow X$ uma Aplicação Cohomologicamente Expansível de uma variedade Kähleriana complexa conexa e compacta com $dim_{\mathbb{C}}(X) = k \geq 1$.
Queremos:

1. Usando os métodos pluripotenciais, construir uma medida de probabilidade canônica invariante natural μ_f de entropia máxima tal que $\lambda_k^{-n}(f^n)^{\star}\Theta \longrightarrow \mu_f$ para cada medida de probabilidade suave Θ em X, onde $\lambda_k := \limsup_{n\longrightarrow\infty}\{||(f^n)^{\star}||^{\frac{1}{n}}\}$ é o número de pré-imagens de um ponto genérico de X por f.
2. Estudar as principais propriedades estocásticas de μ_f e mostrar, se possível, que μ_f é uma medida de equilíbrio, suave, hiperbólica, ergódica, mixing, $\mathbb{K}$-mixing, exponencial-mixing, moderada e a única medida de entropia máxima, absolutamente contínua em relação à medida de LEBESGUE e à medida de HAUSDORF sob determinadas hipóteses.
3. Introduzir o conceito de Medida Perfeita e $\mathbb{K}$-Perfeita e mostrar de fato que μ_f é $\mathbb{K}$-Perfeita.
4. Nós interessarmo-nos por problemas de equidistribuição e mostrar em particular que μ_f reflete uma propriedade de equidistribuição dos pontos periódicos.
5. Finalmente estudar os invariantes numéricos e mostrar a maximalidade da entropia, a inexistência de expoentes de Lyapunov negativos ou nulos sob determinada hipótese e tentar encontrar boas estimativas para a dimensão de μ_f.

Resultados

Conjectura: Seja X uma variedade Kähleriana compacta com $dim_{\mathbb{C}}(X) = k \geq 1$ e $f : X \longrightarrow X$ uma transformação meromorfa cohomologicamente hiperbólica, isto é, tal que $\lambda_l(f) > \max_{j\neq l}\lambda_j(f)$ para um número inteiro $l \in [1, k]$. Então existe uma medida de probabilidade invariante canônica μ_f que não carrega hipersuperfícies complexas e satisfaz :

1. μ_f é a única medida de entropia máxima
$$h_{top(f)} = h_{\mu_f}(f) = \log\lambda_l(f)$$
2. μ_f é mixing e hiperbólica. Seus expoentes de Lyapunov verificam
$$\chi_1 \geq \ldots \geq \chi_l \geq \frac{1}{2}\log(\lambda_l(f)/\lambda_{l-1}(f)) > 0$$
e
$$0 > -\frac{1}{2}\log(\lambda_l(f)/\lambda_{l+1}(f)) \geq \chi_{l+1} \geq \ldots \geq \chi_k.$$
3. μ_f é uma medida de equilíbrio, suave, ergódica, $\mathbb{K}$-mixing, exponencial-mixing, moderada e absolutamente contínua em relação à medida de LEBESGUE e à medida de HAUSDORF sob determinadas hipóteses.
4. μ_f é $\mathbb{K}$-Perfeita.
5. Existem aproximadamente $\lambda_l(f)^n$ pontos periódicos selas de tipo $(k-l, l)$. Estes equidistribuiem-se de acordo com a medida μ_f.

Os resultados: A conjectura é motivada parcialmente pelos trabalhos de Bedford-Lyubich-Smillie [1] que a estabeleceram ,em parte, quando f é uma aplicação de Hénon complexa, bem como os de Fornaess-Sibony [3] e Briend-Duval [4],[5] que lidaram parcialmente com o caso de endomorfismos holomorfos não-lineares de $\mathbb{P}^k$.

Conclusão

1. A conjectura verifica-se quando $f : X \longrightarrow X$ é uma Aplicação Cohomologicamente Expansível numa variedade Kähleriana compacta e conexa X com $dim_{\mathbb{C}}(X) = k \geq 1$.
2. A conjectura verifica-se quando $f : X \longrightarrow X$ é uma transformação biracional ($\lambda_2(f) = 1$) de uma superfície projetiva ($dim_{\mathbb{C}}(X) = 2$), mediante uma hipótese técnica.

Referências

[1] J.SMILLIE E.BEDFORD. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. iii. ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure. *Math. Ann. 294*, (3):395–420, 1992.

[2] H.deTHELIN. Sur les exposants de lyapounov des applications méromorphes. *Prépublication arXiv math.DS/0609628*.

[3] N.SIBONY J.-E.FORNAESS. Complex dynamics in higher dimension. ii. modern methods in complex analysis. *Ann. of Math. Stud.*, (137):135–182, 1995.

[4] J.DUVAL J.-Y.BRIEND. Exposants de liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{CP}^k$. *Acta Math. 182*, (2):143–157, 1999.

[5] J.DUVAL J.-Y.BRIEND. Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. *Publ. Math.Inst. Hautes Etudes Sci.*, (93):145–159, 2001.

[6] X.BUFF. La mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$. *Séminaire Bourbaki, novembre*, 2004.