Construções de reticulados via polinômios

Antonio Aparecido de Andrade

Departamento de Matemática, Ibilce - Unesp, São José do Rio Preto - SP

antonio.andrade@unesp.br

Resumo

No presente trabalho, apresentamos construções de reticulados via polinômios, onde obtemos reticulados com densidade ótima.

Introdução

Sejam $v_1, \cdots, v_n$ vetores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes sobre $\mathbb{Z}$. Um reticulado com base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ é definido como o conjunto dos elementos de $\mathbb{R}^n$ da forma

$$\Lambda = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \text{ com } a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Se $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{in})$, para $i = 1, 2, \cdots, n$, a matriz

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix},$$

é chamada matriz geradora do reticulado. O volume do reticulado Λ é definido como o módulo do determinante da matriz geradora, ou seja,

$$vol(\Lambda) = \mid \det(M) \mid .$$

O número $\rho(\Lambda) = min\{|\lambda|;\ \lambda \in \Lambda,\ \lambda \neq 0\}$ está bem definido e $\rho = \rho(\Lambda)/2$ é o maior raio para o qual é possível distribuir esferas centradas nos pontos de Λ e obter um empacotamento. O número ρ é chamado raio de empacotamento do reticulado.

Se $\mathcal{B}(\rho)$ é a esfera com centro na origem e raio ρ, então a densidade de empacotamento de Λ é dado por

$$\Delta(\Lambda) = \frac{vol(\mathcal{B}(\rho))}{vol(\Lambda)} = \frac{vol(\mathcal{B}(1))\rho^n}{\mid \det(M) \mid}.$$

Construção de reticulados de dimensão 2

Seja o polinômio $p(x) = x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ com raízes reais e distintas α e β. Seja $\Lambda_p \subset \mathbb{R}^2$ o reticulado gerado pela base $\{v_1, v_2\}$, onde $v_1 = (\alpha, \beta)$ e $v_2 = (\beta, \alpha)$. A matriz geradora de Λ_p é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ e } \det(M) = -\alpha^2 - \beta^2 = b\sqrt{\Delta}.$$

Se $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, então

$$\| v \|^2 = a_1^2 (x_1 + x_2)^2 - 2a_0 (x_1 - x_2)^2.$$

Se $a_1^2 = 6a_0$, então

$$\| v \|^2 = 6a_0 (x_1 + x_2)^2 - 2a_0 (x_1 - x_2)^2.$$

O valor $\| v \|^2 = 4a_0$ é o valor mínimo quando $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$. Como

$$\rho = \frac{\Lambda_{min}}{2} = \frac{\sqrt{4a_0}}{2},$$

segue que

$$\delta(\Lambda_p) = \frac{\rho^2}{\mid \det(M) \mid} = \frac{(\frac{\sqrt{4a_0}}{2})^2}{2\sqrt{3}a_0} = \frac{a_0}{2\sqrt{3}a_0} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

que é a densidade de centro ótima para a dimensão 2.

Construção de reticulados de dimensão 3

Sejam $p(x) = x^3 + a_3 x^2 + a_2 x + a_0$ com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}[x]$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ as raízes de $p(x)$. Se $\Lambda_p \subset \mathbb{R}^3$ é o reticulado gerado por $\{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$, $v_2 = (\gamma, \alpha, \beta)$ e $v_3 = (\beta, \gamma, \alpha)$, então

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}. \quad \text{e} \quad \det(M) = -a_2(a_2^2 - 3a_1).$$

Se $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in \Lambda$, onde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$, então

$\| v \|^2 = (a_2^2 - 2a_1)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2a_1(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$.

Se $a_2^2 = 4a_1$ e $a_0(18a_1 a_2 - 4a_2^3 - 27a_0) \geq 0$, então

$$\| v \|^2 = 2a_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3).$$

Assim, $\| v \|^2 = 2a_1$ é o valor mínimo quando $x_1 = 1$ e $x_2 = x_3 = 0$. Logo,

$$\rho = \frac{\Lambda_{min}}{2} = \frac{\sqrt{2a_1}}{2}.$$

Como

$$\det(M)| = | - a_2(a_2^2 - 3a_1)| = |a_1 a_2|,$$

$$\delta(\Lambda_p) = \frac{\rho^3}{\mid \det(M) \mid} = \frac{(\frac{\sqrt{2a_1}}{2})^3}{|a_1 a_2|} = \frac{\frac{2\sqrt{2}a_1\sqrt{a_1}}{2^3}}{2a_1\sqrt{a_1}} = \frac{1}{4\sqrt{2}},$$

que é a densidade de centro ótima para a dimensão 3.

Construção de reticulados de dimensão 4

Sejam $p(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}[x]$ e $\alpha, \beta, \gamma, \omega \in \mathbb{R}$ as raízes de $p(x)$ e $\delta = \alpha + \beta + \gamma + \omega$. Seja o reticulado Λ_p do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, onde $v_1 = (\delta, -\delta, 0, 0)$, $v_2 = (0, \delta, \delta, 0)$, $v_3 = (0, 0, \delta, \delta)$ e $v_4 = (\delta, 0, 0, \delta)$. A matriz geradora de Λ_p é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \delta & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \delta \\ \delta & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(M) = 2a^4.$$

Se $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 \in \Lambda$, onde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$, então

$\| v \|^2 = \delta^2((x_1 + x_4)^2 + (-x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2)$.

Assim, $\| v \|^2 = 2\delta^2 = 2a^2$ é o mínimo com $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$ e $x_4 = 0$. Como

$$\rho = \frac{\Lambda_{min}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2}}{2} = \frac{\mid a \mid \sqrt{2}}{2},$$

segue que

$$\delta(\Lambda_p) = \frac{\rho^4}{\mid \det(M) \mid} = \frac{(\frac{|a|\sqrt{2}}{2})^4}{\mid 2a^4 \mid} = \frac{\frac{2^2 a^4}{2^4}}{2a^4} = \frac{1}{8},$$

que é a densidade de centro ótima para a dimensão 4.

Referências

[1] L. E. Dickson. *First course in the theory of equations*. John Wiley & Sons, Inc., London, 1922.

[2] T. M. Souza. *Reticulados algébricos em corpos de números abelianos*. Ibilce - Unesp, São José do Rio Preto - SP, 2004.