Caracterização de quádricas a partir de conjuntos equidistantes

Toledo, Anna C. G.[1] e Gomes, Alacyr J.
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, Brasil
annaequispron@hotmail.com, alacyr@ufg.br,
[1]Bolsista do Programa PICME sob orientação do professor Alacyr José Gomes.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho iremos falar a respeito de conjuntos equidistantes no plano e no espaço. Conjuntos equidistantes aparecem em trabalhos como os de Garcia [1] e Ponce [5]. Motivado pelo trabalho de Garcia [1] que caracteriza as cônicas como conjuntos equidistantes a círculos, pontos e retas. Aqui iremos caracterizar quádricas como conjuntos equidistantes no espaço.

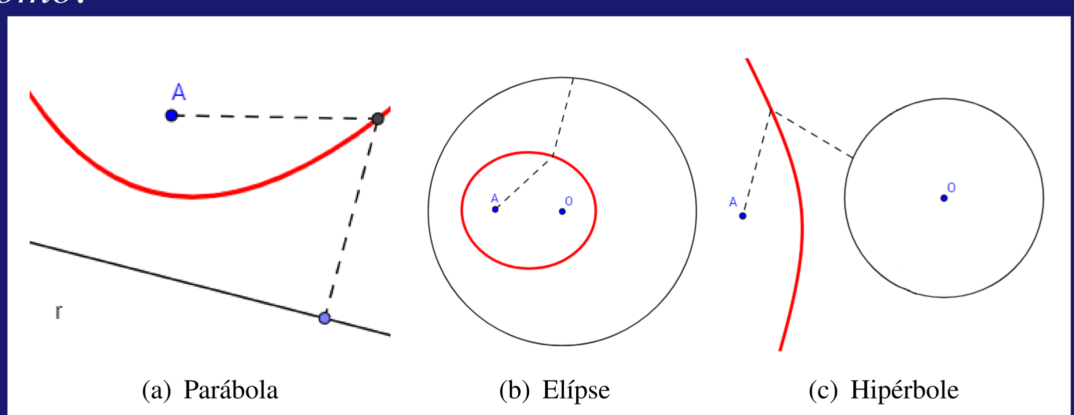
Dado dois conjunto de pontos Q_1, $Q_2 \subset \mathbb{R}^3$, defina o conjunto:

$$E(Q_1, Q_2) = \{X \in \mathbb{R}^3 |\ d(X, Q_1) = d(X, Q_2)\}. \quad (1)$$

Neste trabalho apresentaremos os casos no espaço em que Q_1 e Q_2 são restritos a ponto, reta, circunferência, plano e esfera e $E(Q_1, Q_2)$ é uma quádrica.

Garcia [1] prova que se pode definir uma parábola, hipérbole ou elipse por meio de conjuntos equidistantes.

Exemplo 1. *Dado um ponto A, uma reta r e uma circunferência C, as cônicas podem ser caracterizadas como:*



(a) Parábola (b) Elípse (c) Hipérbole

1 QUÁDRICAS

Nesta seção serão apresentadas as definições dos elementos e ferramentas utilizadas no trabalho.

Definição 1. *Considere $\mathcal{Q}$ o conjunto de todas as quádricas:*

$$\mathcal{Q} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | Ax^2 + Bxy + Cxz + Dy^2 + Eyz + Fz^2 + Dy^2 + Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0\}$$

Em particular, os elementos de $\mathcal{Q}$ podem ser associados a matrizes na forma:

$$Q : \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{C}{2} \\ \frac{B}{2} & D & \frac{E}{2} \\ \frac{C}{2} & \frac{E}{2} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + J = 0.$$

A partir dos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ associados a matriz da parte quadrática de Q, temos a seguinte classificação:

i) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, então Q é um cilindro parabólico ou uma degeneração.

ii) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$, então Q é um cilindro elíptico, um paraboloide elíptico ou uma degeneração.

iii) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0$, então Q é um cilindro hiperbólico, um paraboloide hiperbólico ou uma degeneração.

iv) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \lambda_3 > 0$, então Q é uma elipsóide ou uma degeneração.

v) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0, \lambda_3$ tem sinal oposto a λ_1, então Q é um hiperbolóide ou um cone.

2 QUÁDRICAS COMO CONJUNTOS EQUIDISTANTES

Teorema 1. *Sendo $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ pontos, retas, circunferências, planos ou esferas:*

1. Se Q_1 é um ponto e Q_2 é uma circunferência não coplanares, então $E(Q_1, Q_2)$ é um cone.

2. Se Q_1 é uma esfera e Q_2 é uma circunferência concêntrica a um grande circulo de Q_1 com raio maior que o raio do grande circulo, então $E(Q_1, Q_2)$ é um hiperboloide de revolução de uma folha.

3. Se Q_1 é um ponto e Q_2 é uma esfera que não contém Q_1, então $E(Q_1, Q_2)$ é uma folha de um hiperbolóide de revolução de duas folhas.

4. Se Q_1, Q_2 são retas reversas, então $E(Q_1, Q_2)$ é um paraboloide hiperbólico.

5. Se Q_1 é um plano e Q_2 é um ponto fora de Q_1, então $E(Q_1, Q_2)$ é um paraboloide de revolução.;

6. Se Q_1 é uma esfera e Q_2 é um ponto na região interna de Q_1, então $E(Q_1, Q_2)$ é um elipsoide.

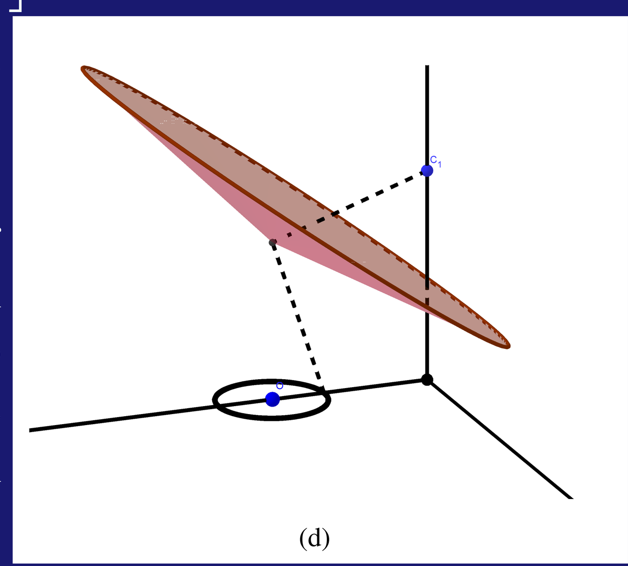
Esboço da demonstração

1.

Sejam Q_1 um ponto e Q_2 uma circunferência não coplanares, então o sistema de coordenadas ideal é:
$Q_1 = (0, 0, a), a \neq 0$;
Q_2 = circunferência de raio r e centro $O = (b, 0, 0)$.
$E(Q_1, Q_2)$ é descrito pela equação:

$$(r^2 - b^2)x^2 + y^2 - a^2z^2 + 2abxz - 2bx + \frac{a^2 + 3b^2}{4} = 0 \quad (2)$$

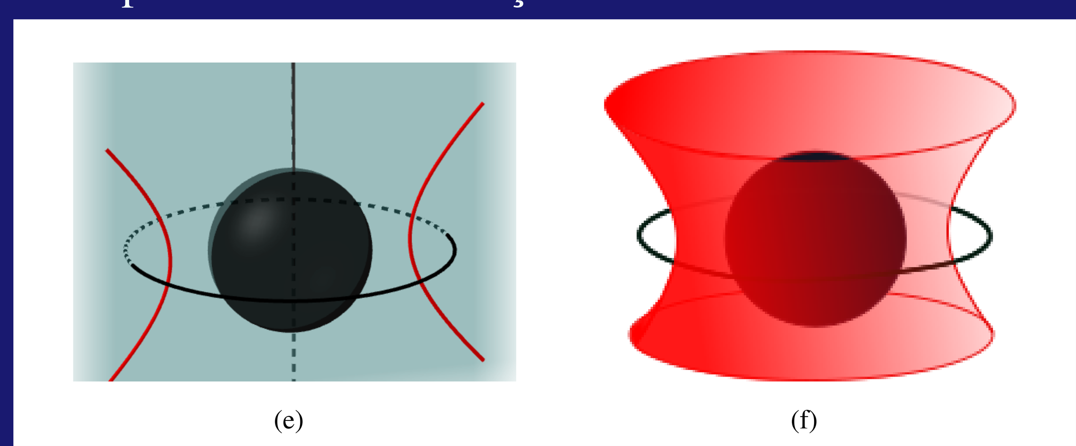
$A = \begin{bmatrix} (r^2-b^2) & 0 & ab \\ 0 & 1 & 0 \\ ab & 0 & -a^2 \end{bmatrix}$ é a matriz que descreve $E(Q_1, Q_2)$ cujos autovalores são $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0, \lambda_3 = 1 > 0$. $E(Q_1, Q_2)$ poderia ser um hiperboloide ou um cone. Pela classificação dada em [3], têm-se que $E(Q_1, Q_2)$ é um cone.



(d)

2.

Observando a simetria entre os planos perpendiculares a Q_2 que contém o centro de Q_1, obtemos que $E(Q_1, Q_2)$ é um hiperboloide de revolução de uma folha.

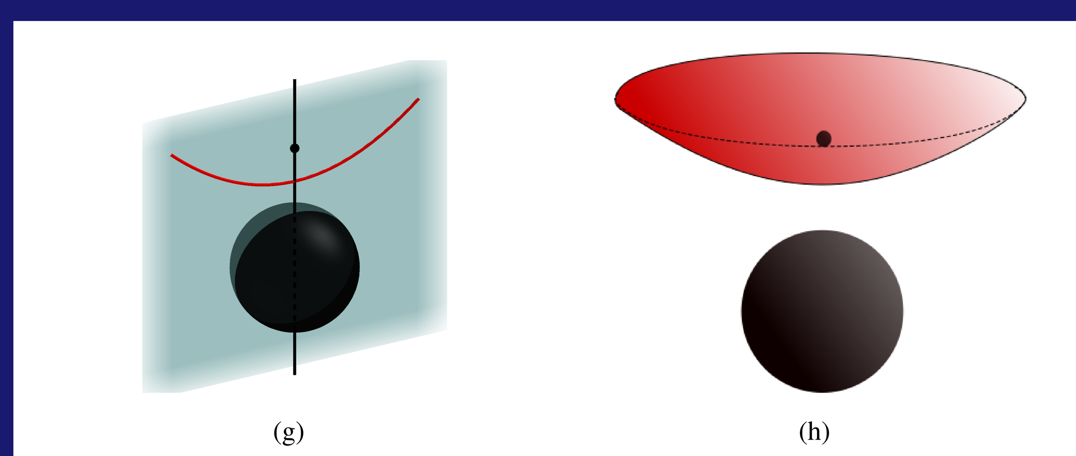

(e) (f)

3.

Se Q_1 é um ponto e Q_2 é uma esfera que não contém Q_1, observe a simetria entre os planos quem contém Q_1 e contém o centro de Q_2.

A partir da coleção de cônicas geradas pelos planos, têm-se que $E(Q_1, Q_2)$ é uma folha de um hiperboloide de revolução de duas folhas.

Observe que apenas uma das folhas é determinada pois o conjunto $E(Q_1, Q_2)$ só determina conjuntos conexos.

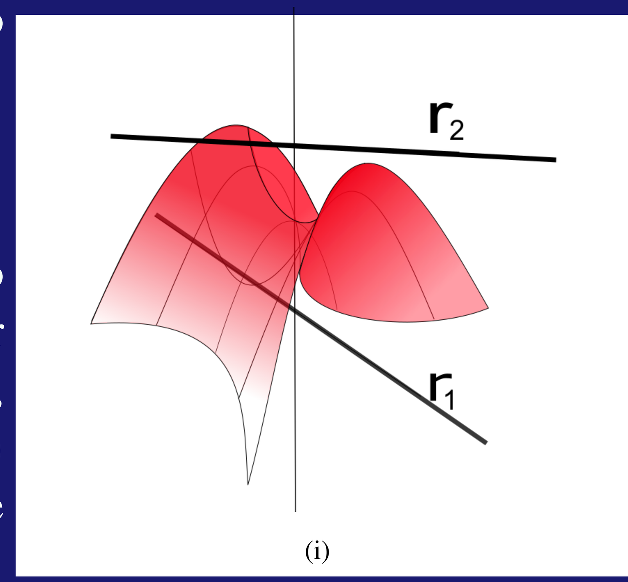

(g) (h)

4.

Se Q_1 e Q_2 são retas reversas, pode-se definir o sistema de coordenadas nos parâmetros u e t:
$Q_1 = r_1 : (u, 0, 0), Q_2 = r_2 : (t, at, c)a, c \in \mathbb{R}$.
$d(X, Q_1) = \sqrt{y^2 + z^2}$;
$d(X, Q_2) = \sqrt{\left(x - \left(\frac{x+ay}{1+a^2}\right)\right)^2 + \left(y - a\left(\frac{x+ay}{1+a^2}\right)\right)^2 + (z - c)^2}$;
$E(Q_1, Q_2)$ é descrito pela equação:

$$a^2x^2 - a^2y^2 - 2axy - 2(a^2 + 1)cz + (1 + a^2)c^2 = 0 \quad (3)$$

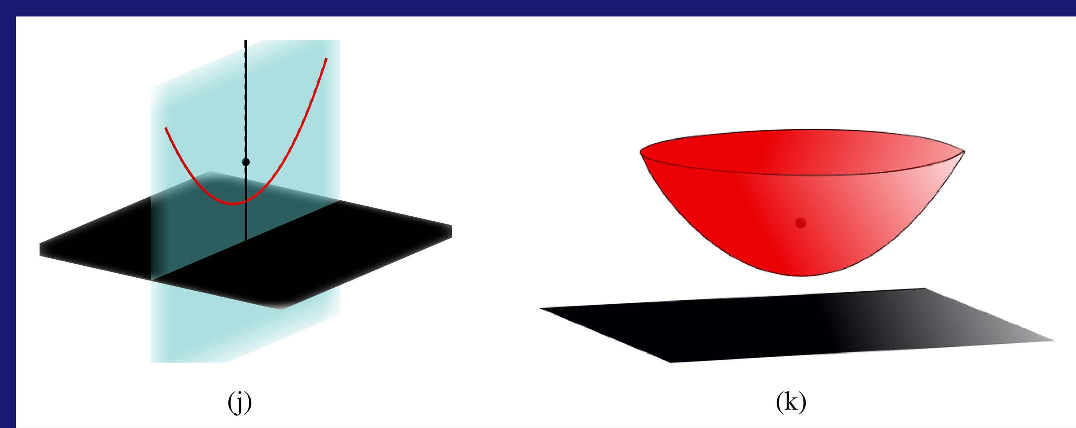
$A = \begin{bmatrix} a^2 & -a & 0 \\ -a & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz que descreve $E(Q_1, Q_2)$ cujos autovalores são $\lambda_1 = \frac{a^2(1+\sqrt{5})}{-2} < 0$, $\lambda_2 = \frac{a^2(1-\sqrt{5})}{-2} > 0$, $\lambda_3 = 0$.
Assim, somado o fato que o coeficiente linear de z é diferente de 0, veja em [3], $E(Q_1, Q_2)$ é um paraboloide hiperbólico.



(i)

5.

Se Q_1 é um plano e Q_2 é um ponto fora de Q_1, observe a simetria entre os planos perpendiculares a Q_1 que contém Q_2. A partir da coleção de cônicas geradas pelos planos, têm-se que $E(Q_1, Q_2)$ é um Paraboloide de revolução.

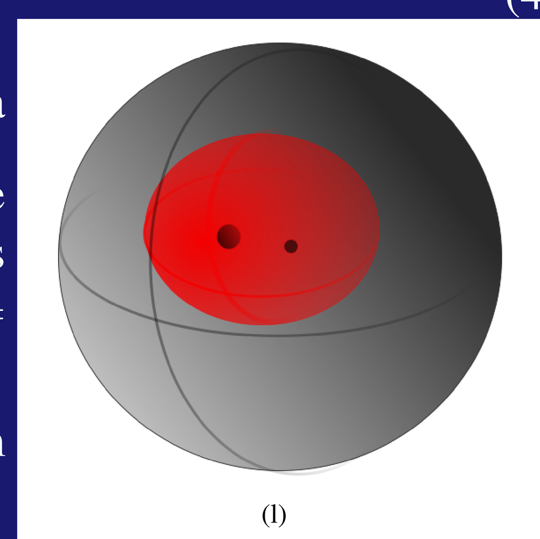

(j) (k)

6.

Se Q_1 é uma esfera e Q_2 é um ponto no interior de Q_1, então o sistema ideal de coordenadas é dado por:
Q_1 como esfera de raio r e centro $O = (0, 0, 0)$.
$Q_2 = (0, 0, a), 0 < a < r$;
$d(X, Q_1) = r - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
$d(X, Q_2) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}$.
Veja que $E(Q_1, Q_2)$ é descrito pela equação:

$$x^2 + y^2 + \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) z^2 - \frac{2a(r^2 - a^2)}{r^2} z - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^2 = 0 \quad (4)$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{a^2}{r^2} \end{bmatrix}$ é a matriz que descreve a parte bilinear de $E(Q_1, Q_2)$ cujos os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) > 0$.
Assim $E(Q_1, Q_2)$ é um elipsoide.


(l)

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Algumas quádricas não citadas, como os cilindros cônicos e as quádricas que não sejam superfícies de revolução, serão solucionados a partir da equação que descreve $E(Q_1, Q_2)$ e posteriormente plublicados com todos os casos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Garcia, Ronaldo A. Equações do Segundo Grau e Geometria Plana. Revista da Olimpíada - IME, UFG. Goiânia. Nº5,p. 33-43, Março/2004.

[2] GEOGEBRA. `http://www.geogebra.at` Acesso em 16 de novembro de 2017.

[3] Lehmann, Charles H. Analytic Geometry. John Wiley e Sons, Inc. - USA. Eighth printing, May 1952.

[4] Lima, Elon Lages . Álgebra Linear - Oitava edição. Rio de Janeiro: IMPA,2011.

[5] Ponce, Mário. *Conjuntos equidistantes y cónicas generalizadas*. Minicurso(LXXXI Enccuentro Anual de la Sociedad de Matemática de Chile) Faculdad de matemáticas. Universidade Católica de Chile. 8-10 de Noviembre de 2012, Olmué, Chile.