Limitantes para os Zeros dos Polinômios de Jacobi

Angélica Lourenço Oliveira
angelicaeh@ufu.br
Universidade Estadual de Campinas

Fernando Rodrigo Rafaeli
rafaeli@ufu.br
Universidade Federal de Uberlândia

Resumo

Visto que os zeros dos polinômios ortogonais de Jacobi são funções monótonas com relação aos seus parâmetros [2], neste trabalho estudamos sobre os limitantes dos seus zeros. Apresentaremos uma relação existente entre os polinômios de Jacobi e os polinômios de Laguerre e a partir disso poderemos relacionar também os seus zeros. Como ferramenta para encontrar os limitantes, utilizaremos estas relações e o Teorema de Stieltjes, que trata sobre a monotonicidade dos zeros de polinômios ortogonais.

Polinômios Ortogonais de Jacobi

Os polinômios de Jacobi, ortogonais em $(-1,1)$ com relação função peso

$$\rho(x;\alpha,\beta) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

são dados pela Fórmula de Rodrigues da seguinte forma

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]^{(n)}}{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}.$$

Tais polinômios são soluções da seguinte equação diferencial, obtida a partir da equação hipergeométrica [2],

$$y''(x) + \left[\frac{\beta+1}{1+x} + \frac{\alpha+1}{x-1}\right] y'(x) + \frac{n(\beta+\alpha+n+1)}{1-x^2} y(x) = 0.$$

Limitantes para os Zeros

Teorema 1. ***(Stieltjes)*** *Seja $y(x,t)$ uma solução polinomial da equação diferencial $y''+Py'+Qy=0$. Suponha que $P=P(x,t)$ seja uma função decrescente de x para cada t. Suponha também que $P(x,t)$ seja uma função diferenciável e decrescente (crescente) de t para cada x. Então os zeros de $y(x,t)$ decrescem (crescem) quando t cresce.*

Em [1] e em [4] foi estabelecido a seguinte relação entre os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e os polinômios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}$,

$$\lim_{\beta\to+\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{2x}{\beta}\right) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

Em [2] foi provado que os zeros $x_{n,j}(\alpha,\beta)$ dos polinômios de Jacobi são funções contínuas de α e β e os zeros $l_{n,j}(\alpha)$ dos polinômios Laguerre são funções contínuas de α. Os zeros $x_{n,j}$ são funções decrescentes e crescentes com relação a α e a β, respectivamente. Os zeros $l_{n,j}$ são funções crescentes de α. Fazendo a mudança de variável $x = 1-2z/\beta$ obtém-se o seguinte limite, que relaciona tais zeros,

$$\lim_{\beta\to+\infty} \beta(1-x_{n,j}(\alpha,\beta)) = 2l_{n,n-j+1}(\alpha), j=1:n.$$

Seja c uma constante que pode depender de n e α, mas que não depende de β. Definindo $f = f_n(\alpha,\beta) = \beta + c$, tem-se os seguintes limites

$$\lim_{\beta\to+\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{2x}{f}\right) = L_n^{(\alpha)}(x),$$

$$\lim_{\beta\to+\infty} (\beta+c)(1-x_{n,j}(\alpha,\beta)) = 2l_{n,n-j+1}(\alpha), j=1:n.$$

Vamos encontrar uma constante c, tal que $f_n(\alpha,\beta)(1-x_{n,j}(\alpha,\beta))$ sejam funções monótonas (crescentes) de β.

Como os polinômios $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ são ortogonais em $(-1,1)$ com relação a função peso $\rho(x;\alpha,\beta) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, então $P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2z/f)$ é ortogonal em $(0,f)$ com relação à função peso

$$\rho(z;\alpha,\beta) = z^{\alpha}(f-z)^{\beta},$$

para $\alpha,\beta > -1$.

Observe que neste caso a função peso seria da forma $\rho(z;\alpha,\beta) = \left(\frac{2}{f}\right)^{\alpha} z^{\alpha}(f-z)^{\beta}$. Porém a constante $\left(\frac{2}{f}\right)^{\alpha}$ não interfere na propriedade de ortogonalidade nem na monotonicidade da função peso.

Os polinômios $P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2z/f)$ satisfazem a seguinte equação diferencial,

$$Y''(z) + \left(\frac{\alpha+1}{z} - \frac{\beta+1}{f-z}\right) Y'(z) + \frac{4n(\beta+\alpha+n+1)}{f^2-(f-2z)^2} Y(z) = 0,$$

com

$$Y(z) = y(1-2z/f) = P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2z/f),$$

já que

$$y'(1-2z/f) = -f/2Y'(z)$$

e

$$y''(1-2z/f) = (f/2)^2 Y''(z).$$

Seus zeros são da forma $z_{n,j}(\alpha,\beta) = f_n(\alpha,\beta)(1-x_{n,j}(\alpha,\beta))/2$, $j=1:n$.

Observe que

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha+1}{z} - \frac{\beta+1}{f-z}\right) = -\frac{\alpha+1}{z^2} - \frac{\beta+1}{(f-z)^2} < 0.$$

E mais,

$$\frac{\partial P}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\alpha+1}{z} - \frac{\beta+1}{f-z}\right) = \frac{z-f+\beta+1}{(f-z)^2}.$$

Temos que $\frac{\partial P}{\partial \beta} \geq 0$ se, e somente se, $c \leq 1$. De fato, a desigualdade é verdadeira se, e somente se, $z - f + \beta + 1 \geq 0$. Mas

$$z - f + \beta + 1 = z - \beta - c + \beta + 1 = z - c + 1$$

. Como $z \geq 0$ então a desigualdade vale se, e somente se, $c \leq 1$.

Do Teorema 1, para $c \leq 1$, as funções

$$(\beta+c)(1-x_{n,j}(\alpha,\beta))/2$$

são crescentes de β. E mais, convergem para $l_{n,n-j+1}(\alpha)$, $j=1:n$, quando β tende ao infinito.

Tomando $c=1$, obtemos $(\beta+1)(1-x_{n,j}(\alpha,\beta)) \leq 2l_{n,n-j+1}(\alpha)$, $j=1:n$. Ou equivalentemente,

$$1 - \frac{2}{\beta+1} l_{n,n-j+1}(\alpha) \leq x_{n,j}(\alpha,\beta), j=1:n.$$

Disso, temos que o lado esquerdo da inequação anterior são limitantes inferiores para os zeros dos polinômios de Jacobi.

Em [3] foi provado que o melhor valor ótimo para c é dado por

$$c = n + \frac{\alpha+1}{2} + \frac{1-\alpha^2}{2(2n+\alpha+1)}.$$

Ilustração Gráfica

A imagem abaixo ilustra o comportamento dos zeros $z_{4,j} = (\beta+1)(1-x_{4,j})/2$, com $j=1:4$ (linha contínua), com relação ao parâmetro β, tomando $c=1$. Observe que cada zero $z_{4,j}(\alpha,\beta)$, $j=1:4$, é uma função crescente de β e tende às raízes $l_{4,j}(\alpha)$, $j=1:4$ (linha pontilhada), quando $\beta\to\infty$, com $\alpha=2$.

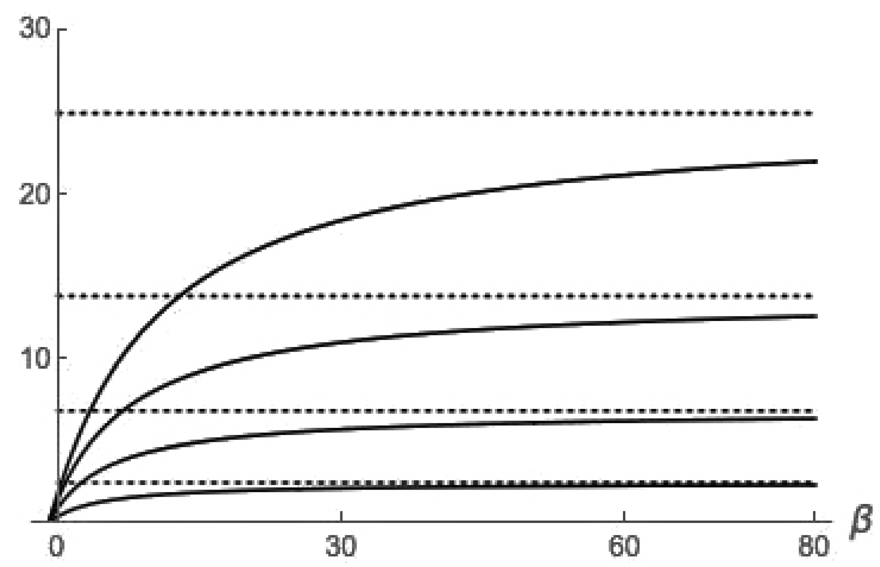

Figura 1: Gráfico dos zeros $z_{n,j} = \frac{1}{2}(1-x_{n,j})(\beta+1)$, $j=1:4$.

Já a imagem abaixo mostra os limites inferiores (linha pontilhada), dos zeros $x_{4,j}(\alpha,\beta)$, $j=1:4$ (linha contínua), dos polinômios de Jacobi $P_4^{(\alpha,\beta)}(x)$, com relação ao parâmetro β, tomando $\alpha=2$.

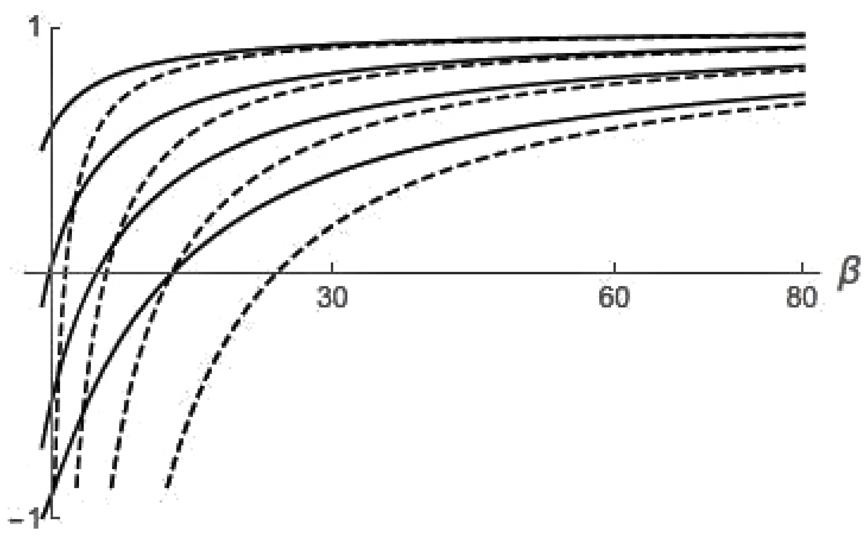

Figura 2: Gráfico dos limitantes inferiores dos zeros $x_{4,j}(2,\beta)$ dos Polinômios $P_4^{(2,\beta)}$

Referências

[1] KoeKoek, R. and René, F. S., *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue.* Delft University of Technology and Faculty of Information Technology and Systems Report. no. 98/17, 1998.

[2] Oliveira, A. L., Rafaeli, F. R., *Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios Ortogonais Clássicos: Teoremas de Markov e Stieltjes.* Dissertação de Mestrado, 2017, UFU.

[3] Rafaeli, F. R., *Zeros de polinômios ortogonais na reta real* Tese de Doutorado, 2010, UNICAMP.

[4] Szegö, G., *Orthogonal Polynomials* International Standard Book Number, Colloquium publications v. 23, 1939.v