A Integral de Lebesgue

Ana Laura Mendonça Marangoni & Pedro Franklin Cardoso Silva

Universidade Federal de Uberlândia

almmarangoni@gmail.com, pedrofranklinrs@gmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre a teoria de integração de Lebesgue, construída a partir da Teoria da Medida. Como será visto adiante, esta integral será definida, primeiramente, para funções simples positivas, depois, para funções mensuráveis positivas e, por fim, para qualquer função mensurável. Em seguida, será apresentado um interessante exemplo de uma função, que não é integrável em relação a Riemann mas, sim, em relação a Lebesgue.

Introdução

A teoria de integração foi desenvolvida, em sua maior parte, pelos matemáticos Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Augustin-Louis Cauchy e Georg Friedrich Bernhard Riemann. Com os aprimoramentos desse princípio, o foco do estudo tornou-se resolver questões puramente analíticas, para as quais a teoria clássica de integração – que culminou na Integral de Riemann – não é sempre suficiente. Apesar de predominante, durante muito tempo, a teoria de integração de Riemann tem sido substituída por outra, desenvolvida com fundamento no trabalho pioneiro do matemático francês Henri Leòn Lebesgue. Isso se dá pelo fato de que os fortes teoremas de convergência, associados à teoria de integração de Lebesgue, levam a resultados mais gerais, completos e elegantes do que os advindos da teoria de integração de Riemann.

A Construção da Integral de Lebesgue

Definição 1 (Integral de Lebesgue para Funções Simples Positivas). *Sejam φ uma função simples positiva e μ uma medida. Definimos a Integral de Lebesgue de φ com relação a μ da seguinte forma:*

$$\int \varphi d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_{A_k}.$$

Proposição 1. *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Se φ e ψ são funções simples positivas em $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e $c \geq 0$, então valem as propriedades:*

(a) $\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu$;

(b) $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$.

Definição 2 (Integral de Lebesgue para Funções Mensuráveis Positivas). *Sejam f uma função mensurável positiva, φ uma função simples positiva e μ uma medida. Definimos a Integral de Lebesgue de f com relação a μ da seguinte forma:*

$$\int \varphi d\mu := sup\{\int \varphi d\mu : \varphi \leq f\}.$$

Definição 3. *Seja f uma função mensurável. Então, a parte positiva de f, denotada por f^+, é definida por $f^+(\omega) = \max\{0, f(\omega)\}$. De maneira semelhante, a parte negativa de f, denotada por f^-, é definida por $f^-(\omega) = \max\{0, -f(\omega)\}$.*

Definição 4. *Seja f uma mensurável definida no espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Considere as partes positiva e negativa de f. Definimos a Integral de Lebesgue de f da seguinte maneira*

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Se tanto a Integral de Lebesgue de f^+ quanto a Integral de Lebesgue de f^- forem finitas, então dizemos que f é integrável com relação a Lebesgue.

Um Simples Exemplo

Exemplo 1. *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, em que $\Omega = (0,1)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}((0,1))$ e $\mu : \mathcal{B}((0,1)) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a Medida de Lebesgue, definida por $\mu((a,b)) = b - a$. Seja $Q = \{q \in (0,1) : q \in \mathbb{Q}\}$ o conjunto dos elementos racionais de $(0,1)$. Considere a função φ, definida por:*

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 1, & se \quad \omega \in Q, \\ 0, & se \quad \omega \in Q^c. \end{cases}$$

Vamos mostrar que φ, apesar de não ser integrável com relação a Riemann, é integrável com relação a Lebesgue e que $\int \varphi d\mu = 0$.

Observe, inicialmente, que φ é descontínua em todo ponto irracional de $(0,1)$, ou seja, em Q^c. De fato, tome $x \in Q^c$. Como o conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais, é denso em $(0,1)$, então existe uma sequência $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, tal que

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = x.$$

Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(r_n) = 1$. Por outro lado, temos que $\varphi(x) = 0$. Daí,

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 1 \neq 0 = \varphi(x).$$

Logo, por Teorema em [1], φ não é contínua em Q^c.

Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de φ. Pela prova anterior, temos que $Q^c \subseteq D$. Vamos mostrar, então, que φ não é integrável com relação a Riemann. Ou seja, queremos mostrar $\mu(D) > 0$. Como $Q^c \subseteq D$, basta mostrarmos que $\mu(Q^c) > 0$.

Vamos calcular $\mu(Q^c)$. Seja $r \in Q$. Sabemos que

$$\mu(\{r\}) = 0, \;\; Q = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{r\}.$$

Como $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{r\}$ é enumerável, podemos escrever:

$$\mu(Q) = \mu(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{r\}) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \mu(\{r\}) = 0.$$

Observe que $(0,1) = Q \cup Q^c$ e que $\mu((0,1)) = 1 - 0 = 1$. Como essa união é disjunta, temos:

$$\mu((0,1)) = \mu(Q \cup Q^c) = \mu(Q) + \mu(Q^c) = 0 + \mu(Q^c) = \mu(Q^c).$$

Concluímos que $\mu(Q^c) = 1 > 0$ e, por Teorema em [1], φ não é integrável com relação a Riemann.

Note, agora, que φ é uma função simples positiva. Logo, pela Definição 1., a Integral de Lebesgue de φ com relação a μ existe e é dada por:

$$\int \varphi d\mu = 1(\mu(Q)) + 0(\mu(Q^c)) = 1(0) + 0(1) = 0.$$

Conclusão

O exemplo apresentado permite a percepção de que a Integral de Lebesgue estende, para uma classe maior de funções, a Integral de Riemann.

Referências

[1] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise. v. 1.* Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2010.

[2] BARTLE, Robert G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* New York: John Wiley and Sons, 1995.