Grupos de Homologia da Esfera e do Toro

Amanda Melo & Marcelo Moreira

Universidade Federal de Alfenas

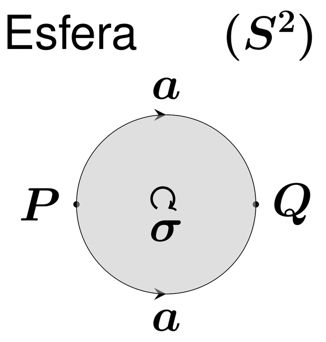
amandademelosouza@gmail.com
marcelo.moreira@unifal-mg.edu.br

Resumo

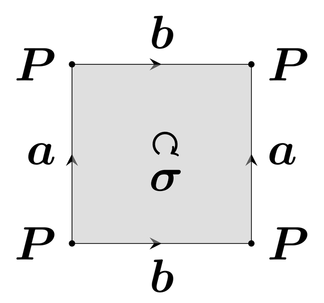
A topologia algébrica estabelece uma ligação entre *topologia* e *álgebra*, em que são usadas as ferramentas da álgebra para resolver problemas de topologia e vice-versa. A topologia algébrica associa as propriedades dos objetos com grupos invariantes, por exemplo os *grupos de homotopia* e os *grupos de homologia*. Neste trabalho, os estudos concentram-se nos conceitos relativos a teoria de grupos e a topologia algébrica, tais como grupos, subgrupos, subgrupos normais, grupos abelianos livres, homomorfismos de grupos, grupos quocientes, espaços topológicos, homeomorfirmos, n-células, n-cadeias, homomorfismo de bordos, a fim de definir e calcular os grupos de homologia da esfera e do toro.

É possível associar a esfera e o toro através de homeomorfirmos com complexos celulares:

Esfera (S^2)



Toro $(\mathbb{T}^2)$

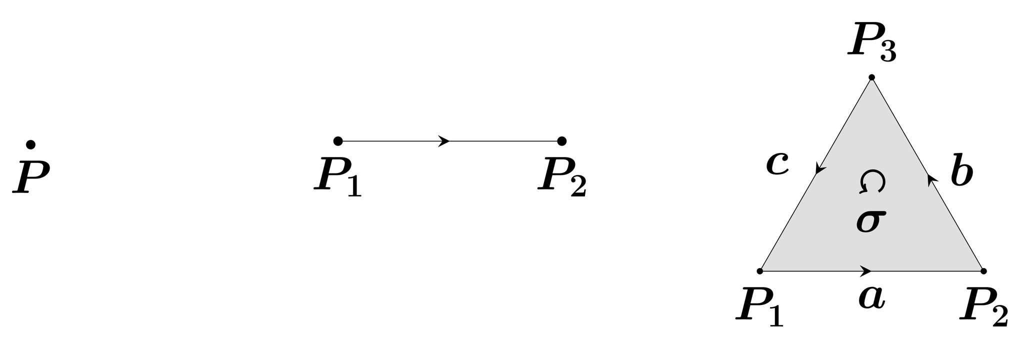


Esses espaços permitem o cálculo dos grupos de homologia de uma forma mais simplificada.

Células

Introduzindo a ideia de uma n-célula em $\mathbb{R}^3$ para $n = 0, 1$ e 2. Uma **0-célula** é somente um ponto P. Uma **1-célula** é um segmento P_1P_2 visualizado como um caminho direcionado de P_1 à P_2. Uma **2-célula** é um conjunto cujo interior é homeomorfo ao disco de dimensão 2.

Orientação de uma célula



Bordo de uma n-célula

Definição. Estabelecendo o **bordo de uma n-célula** para $n = 0, 1$ e 2.

- Bordo de uma 0-célula: $\partial_0(P) = 0$
- Bordo de uma 1-célula: $\partial_1(P_1P_2) = P_2 - P_1$
- Bordo de uma 2-célula: $\partial_2(\sigma) = a + b + c$

Grupos Abelianos Livres

Definição. Seja X um subconjunto de um grupo abeliano não nulo G. Um grupo abeliano tem um conjunto gerador X que torna as condições equivalentes:

i) Cada elemento não nulo a em G pode ser expressado unicamente na forma $a = n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_rx_r$ para $n_i \neq 0$ em $\mathbb{Z}$ e x_i distintos em X.

ii) X gera G e $n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_rx_r = 0$ para n_i em $\mathbb{Z}$ e x_i distintos em X se e somente se $n_1 = n_2 = ... = n_r = 0$.

é um **grupo abeliano livre** e X é uma base para o grupo.

Teorema. Se G é um grupo abeliano livre com a base de r elementos, então G é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$ para r fatores.

Cadeias

Definição. Considera-se X um **complexo celular** se for um conjunto finito de células

$$X = \bigcup \{\sigma : \sigma \text{ é uma célula}\}$$

tal que:

- $\sigma \in X$, então todas as células que compõe a fronteira de σ estão em X;
- Se $\sigma, \tau \in X$, então $\mathrm{Int}\,\sigma \cap \mathrm{Int}\,\tau = \varnothing$.

O grupo abeliano livre gerado pelas n-células orientadas de X é chamado de grupo $C_n(X)$, em que cada elemento de $C_n(X)$ é chamado de **n-cadeia orientada**. Portanto, todo elemento de $C_n(X)$ é uma soma finita da forma $\sum_i m_i\sigma_i$, em que σ_i são n-células de X e $m_i \in \mathbb{Z}$. Para $n = -1$, denota-se $C_{-1}(X) = 0$.

Homomorfismo de bordos

Seja σ uma n-célula, $\partial_n(\sigma) \in C_{n-1}(X)$ para $n = 0, 1$ e 2, dessa forma, define-se a aplicação ∂_n:

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

Como $C_n(X)$ é livre abeliano e a aplicação ∂_n é definida nos geradores do grupo, ∂_n é um homomorfismo, chamado **homomorfismo de bordos**. Dessa forma, define-se dois subgrupos de $C_n(X)$:

$$Z_n(X) = \mathrm{Nuc}(\partial_n) \text{ e } B_n(X) = \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$$

Grupos Quocientes

Seja G um grupo e N um subgrupo normal em G. Dados $a, b \in G$, a associação $ab^{-1} \in N$ define uma relação de equivalência em G e $G/N = \{\bar{a} : a \in G\}$ é o conjunto quociente de G por essa relação de equivalência em que $\bar{a} = Na = \{na : n \in N\}$ é classe de equivalência módulo N tendo a como representante.

Proposição. Seja G um grupo e H um subgrupo normal de G. Então, para todo $a, b \in G$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$ define uma operação no conjunto das classes G/N e mais ainda G/N é um grupo com essa operação, chamado de **grupo quociente** .

Grupos de Homologia

Definição. O grupo quociente $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ é o n-ésimo **grupo de homologia** de X.

Sendo assim, os grupos de homologia são:

Esfera (S^2)

$$H_0(S^2) = Z_0(S^2)/B_0(S^2) \simeq \mathbb{Z}$$
$$H_1(S^2) = Z_1(S^2)/B_1(S^2) \simeq 0$$
$$H_2(S^2) = Z_2(S^2)/B_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$$
$$H_3(S^2) = Z_3(S^2)/B_3(S^2) \simeq 0$$

Toro $(\mathbb{T}^2)$

$$H_0(\mathbb{T}^2) = Z_0(\mathbb{T}^2)/B_0(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}$$
$$H_1(\mathbb{T}^2) = Z_1(\mathbb{T}^2)/B_1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
$$H_2(\mathbb{T}^2) = Z_2(\mathbb{T}^2)/B_2(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}$$
$$H_3(\mathbb{T}^2) = Z_3(\mathbb{T}^2)/B_3(\mathbb{T}^2) \simeq 0$$

Resultados

Teorema. Se o espaço X é um complexo com um número finito de células, então $H_0(X)$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}$ e o número de fatores de $\mathbb{Z}$ é o mesmo número de componentes conexos de X.

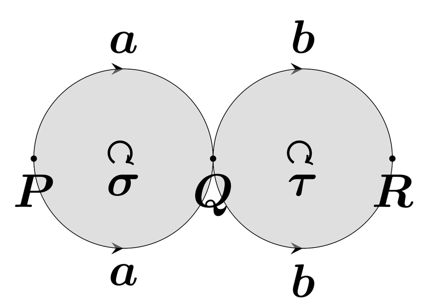
Teorema. Se X é um espaço contrátil com um número finito de células, então $H_n(X) = 0$, para $n \geqslant 1$.

Teorema. Sejam Y e Z complexos celulares conexos com $Y \cap Z = \{Q\}$, para um ponto Q. Seja $X = Y \cup Z$. Então X é um complexo celular e

$$\begin{aligned} H_n(X) &\simeq H_n(Y) \times H_n(Z), & n > 0 \\ H_0(X) &\simeq \mathbb{Z}, & n = 0 \end{aligned}$$

O espaço X é chamado *união por um ponto* e é denotado por $X = Y \vee Z$.

Duas esferas tangentes $(S^2 \vee S^2)$



$$H_0(S^2 \vee S^2) \simeq \mathbb{Z}$$
$$H_1(S^2 \vee S^2) \simeq 0$$
$$H_2(S^2 \vee S^2) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
$$H_3(S^2 \vee S^2) \simeq 0$$

Referências Bibliográficas

FRALEIGH, J. B. **A First Course in Abstract Algebra**. Terceira edição. Delhi: Pearson Education, 2003.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. Sexta edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

KINSEY, L. C. **Topology of Surfaces**. Primeira edição. New York: Springer, 1993.