Introdução à Superálgebras de Lie

Aline Jaqueline de Oliveira Andrade

Tiago Rodrigues Macedo (orientador)

Universidade Federal de São Paulo - ICT

aline.jaqueline.o.a@gmail.com

Introdução

A teoria de representações de (super)álgebras de Lie tem sido intensamente pesquisada, principalmente nos últimos anos, devido às suas relações com áreas como supersimetria, teoria de cordas, teoria de números e equações diferenciais, por exemplo.

Neste trabalho introduziremos conceitos básicos de $\mathbb{Z}$-graduação e $\mathbb{Z}_2$-graduação para definirmos superálgebras de Lie. Em seguida, definiremos subálgebra e ideal de uma superálgebra de Lie, superálgebra simples, e mostraremos alguns exemplos de superálgebras de Lie simples e não-simples.

Conceitos básicos

Definição 1. *Sejam V um espaço vetorial e Γ um grupo. Uma **Γ-graduação** em V é uma família $\{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ de subespaços de V tais que*

$$V = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma.$$

*Nesse caso, o espaço vetorial V é dito **Γ-graduado**. Um elemento de V é dito **homogêneo** de grau γ, $\gamma \in \Gamma$, se esse elemento pertence a V_γ.*

Definição 2. *Seja $(A, *)$ uma álgebra. Dizemos que A é **Γ-graduada** se A for Γ-graduada como espaço vetorial, ou seja, $A = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, e, além disso,*

$$A_\alpha * A_\beta \subseteq A_{\alpha\beta}, \quad \text{para quaisquer } \alpha, \beta \in \Gamma.$$

*No caso particular em que $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, as álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas são chamadas de **superálgebras**.*

Definição 3. *Dada uma superálgebra $S = S_{\bar 0} \oplus S_{\bar 1}$, uma $\mathbb{Z}$-graduação $S = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S_j$ é dita **consistente** com a $\mathbb{Z}_2$-graduação de S se*

$$S_{\bar 0} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S_{2j}, \quad S_{\bar 1} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S_{2j+1}.$$

Superálgebras de Lie

Definição 4. *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar 0} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 1}$ uma superálgebra com multiplicação denotada por $[\cdot,\cdot]$. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma **superálgebra de Lie**, se sua multiplicação satisfaz as seguintes condições:*

1. $[a, b] = -(-1)^{\alpha\beta}[b, a]$,
2. $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\alpha\beta}[b, [a, c]]$,

para quaisquer $a, b, c \in \mathfrak{g}$ homogêneos de graus α, β, γ respectivamente.

Exemplo 1. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $V = \mathbb{K}^{m|n}$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathbb{K}^{m+n}$ munido da $\mathbb{Z}_2$-gradução: $V_{\bar 0} = \mathbb{K}^m$, $V_{\bar 1} = \mathbb{K}^n$. A superálgebra $\mathfrak{gl}(V)$ é denotada por $\mathfrak{gl}(m, n)$. Tomando $\mathfrak{gl}(m,n) = \mathfrak{gl}(m,n)_{-1} \oplus \mathfrak{gl}(m,n)_0 \oplus \mathfrak{gl}(m,n)_1$, com*

$$\mathfrak{gl}(V)_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array}\right) \mid C \in M_{n\times m}(\mathbb{K}) \right\},$$

$$\mathfrak{gl}(V)_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \mid A \in M_{m\times m}(\mathbb{K}), D \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \right\},$$

$$\mathfrak{gl}(V)_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \mid A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}) \right\},$$

definimos uma $\mathbb{Z}$-graduação em $\mathfrak{gl}(m, n)$.

Definição 5. *Dada uma superálgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$, uma **subálgebra** de $\mathfrak{g}$ é definida como sendo um subespaço vetorial $\mathbb{Z}_2$-graduado $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, tal que $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot])$ é uma superálgebra de Lie.*

Exemplo 2. *Observe que $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, pois $[\mathfrak{g}_{\bar 0}, \mathfrak{g}_{\bar 0}] \subseteq \mathfrak{g}_{\bar 0 + \bar 0} = \mathfrak{g}_{\bar 0}$. Mas, se $[\mathfrak{g}_{\bar 1}, \mathfrak{g}_{\bar 1}] \neq \{0\}$, então $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ não é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, pois $[\mathfrak{g}_{\bar 1}, \mathfrak{g}_{\bar 1}] \subseteq \mathfrak{g}_{\bar 1 + \bar 1} = \mathfrak{g}_{\bar 0}$.*

Definição 6. *Um **ideal** de uma superálgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ é uma subálgebra $I \subset \mathfrak{g}$, tal que*

$$[x, i] \in I, \quad \forall x \in \mathfrak{g}, \ \forall i \in I.$$

Exemplo 3.

1. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] := \text{span}\{[x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g}\}$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$.
2. $Z(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}\}$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$.

Definição 7. *Uma superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita **simples** se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{0\}$ (não-abeliana) e seus únicos ideais são $\{0\}$ e $\mathfrak{g}$.*

Superálgebras especiais lineares

Definição 8. *O **supertraço** de um elemento $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(m, n)$ é definido por*

$$str\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = tr(A) - tr(D).$$

A superálgebra de Lie Especial Linear especial é definida por

$$\mathfrak{sl}(m, n) = \{a \in \mathfrak{gl}(m, n) \,|\, str(a) = 0\}.$$

Observação. Como $str([x, y]) = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathfrak{gl}(m, n)$, então $\mathfrak{sl}(m, n)$ é uma subálgebra da superálgebra de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$.

Exemplo 4. *Consideremos a superálgebra de Lie*

$$\mathfrak{sl}(1, 1) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \alpha \end{array}\right) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \right\},$$

com

$\mathfrak{g}_{\bar 0} = \text{span}\{h\}$, $h = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$, $\mathfrak{g}_{-1} = \text{span}\{y\}$, $y = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)$, $\mathfrak{g}_1 = \text{span}\{x\}$, $x = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, $\mathfrak{g}_{\bar 1} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$.

Observemos que $\mathfrak{sl}(1, 1)$ não é uma subálgebra simples de $\mathfrak{gl}(1, 1)$, pois $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_0$ é um ideal não-trivial de $\mathfrak{sl}(1, 1)$.

Exemplo 5. *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(1, 2)$, uma superálgebra de dimensão finita, que consiste das matrizes 3×3 da forma*

$$\left(\begin{array}{c|cc} a+d & x & y \\ \hline z & a & b \\ w & c & d \end{array}\right), \quad a, b, c, d, x, y, z, w \in \mathbb{C}.$$

Consideremos a $\mathbb{Z}-$graduação de $\mathfrak{g}$, dada por

$$\mathfrak{g}_{\bar 0} = \mathfrak{g}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} a+d & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{array}\right), \ a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\} \text{ e}$$

$$\mathfrak{g}_{\overline{-1}} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1, \text{ com } \mathfrak{g}_{\overline{-1}} = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline z & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 \end{array}\right), \ z, w \in \mathbb{C} \right\} \text{ e}$$

$$\mathfrak{g}_{\bar 1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & x & y \\ \hline z & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 \end{array}\right), \ x, y \in \mathbb{C} \right\}. \text{ Assim, } \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1.$$

Observemos que $\mathfrak{g}_0$ é uma álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{gl}(2)$. E, além disso, $\mathfrak{sl}(1|2)$ não é simples.

Referências

[1] CALIXTO, L. H., *Superálgebras de funções*. 2013. 139 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 2013.

[2] MUSSON, I. M., *Lie Superalgebras and Enveloping Algebras*, Graduate Studies in Mathematics, 2012.

[3] HUMPHREYS, J., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, GTM9 Springer, 1972.