

Estratégias de Natação em Escoamentos Bidimensionais

Alfredo Jara & Rafael Vilela

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Universidade Federal do ABC

Santo André, SP, Brasil

alfredo.jara@ufabc.edu.br

rafael.vilela@ufabc.edu.br



Resumo

Neste trabalho são estudados dois protocolos de natação de partículas autopropelidas num escoamento bidimensional estacionário correspondente a células convectivas com barreiras de transporte. O objetivo é a determinação do protocolo mais eficiente para fomentar o transporte das partículas ao longo de uma direção pré-fixada. O primeiro protocolo consiste em auto-propulsão com velocidade constante ao longo da direção pré-fixada e o segundo protocolo consiste em auto-propulsão com modulação temporal senoidal ao longo daquela direção. Note-se que, nos dois casos, a velocidade das partículas é dada pela soma da sua velocidade de auto-propulsão com a velocidade do escoamento na posição da partícula. A principal pergunta que nos motiva é: qual desses protocolos leva a um conjunto maior (do ponto de vista de medida) de condições iniciais de trajetórias que não ficam confinadas a um domínio compacto do espaço físico? Utilizamos técnicas numéricas e analíticas (método de Melnikov) para estudar essa questão.

Introdução

Considere o escoamento convectivo dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\pi \sin(2\pi x) \cos(2\pi y), \\ \dot{y} &= -2\pi \cos(2\pi x) \sin(2\pi y).\end{aligned}\quad (1)$$

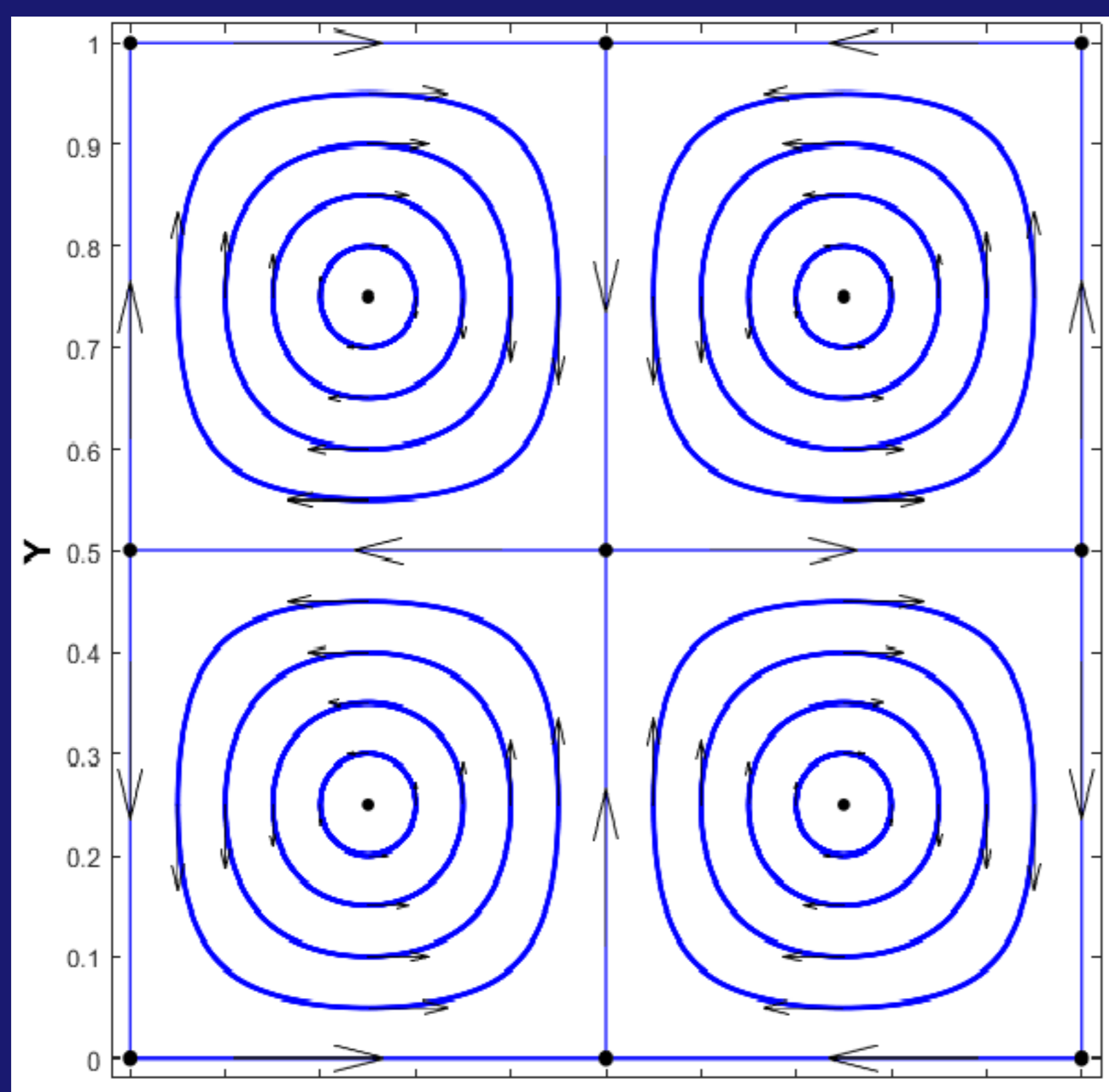


Figura 1: Retrato de fases do sistema 1.

Vemos que uma partícula sem auto-propulsão permanece confinada em alguma região compacta do espaço de fases $\Omega = [0, 1]^2$. Quando as partículas pretendem escapar das barreiras de transporte e ter movimento ao longo de uma direção predeterminada podem usar diferentes formas de fazê-lo. Aqui estudamos duas dessas estratégias. A primeira é auto-propulsão com velocidade constante, isso será chamado de *primeiro protocolo de natação*. A segunda é auto-propulsão com modulação temporal senoidal e será chamado de *segundo protocolo de natação*.

Objetivos

Determinar o protocolo que melhor promove a natação. Um protocolo será *melhor* que o outro se sua adoção leva a um maior (no sentido de medida) conjunto de condições iniciais de trajetórias não confinadas.

1 Primeiro Protocolo: Natação com velocidade constante

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\pi \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) + \alpha, \\ \dot{y} &= -2\pi \cos(2\pi x) \sin(2\pi y).\end{aligned}\quad (2)$$

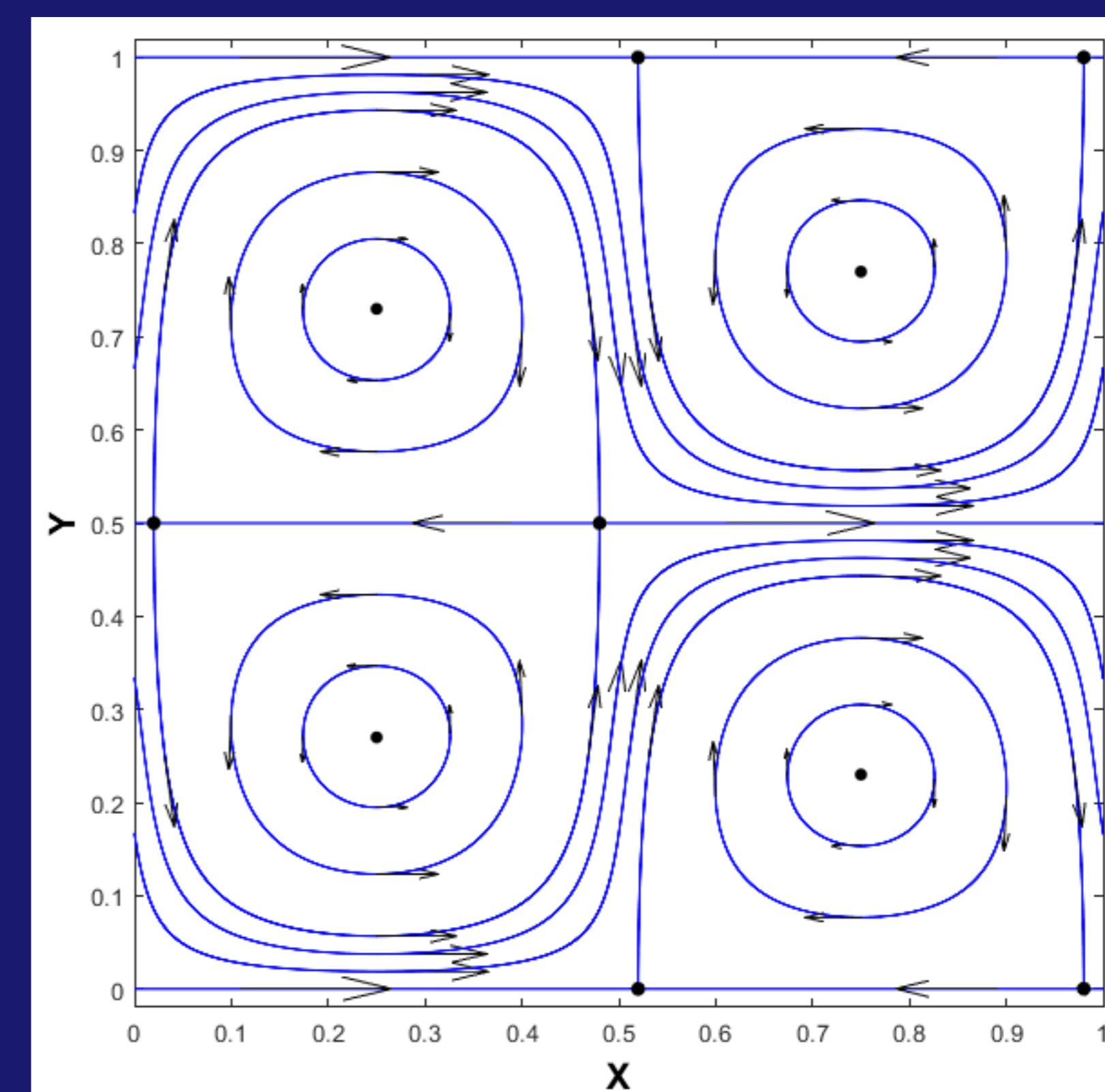


Figura 2: Retrato de fases do sistema 2 com $\alpha = 0.1$.

Agora existem trajetórias que não ficam mais confinadas. O sistema 2 é um sistema hamiltoniano cuja função corrente é

$$\psi_\alpha(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + \alpha y.$$

Pode-se demonstrar que as conexões heteroclínicas satisfazem

$$\sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + \alpha y = \frac{\alpha m}{2}, \quad m \in \{0, 1, 2\}.$$

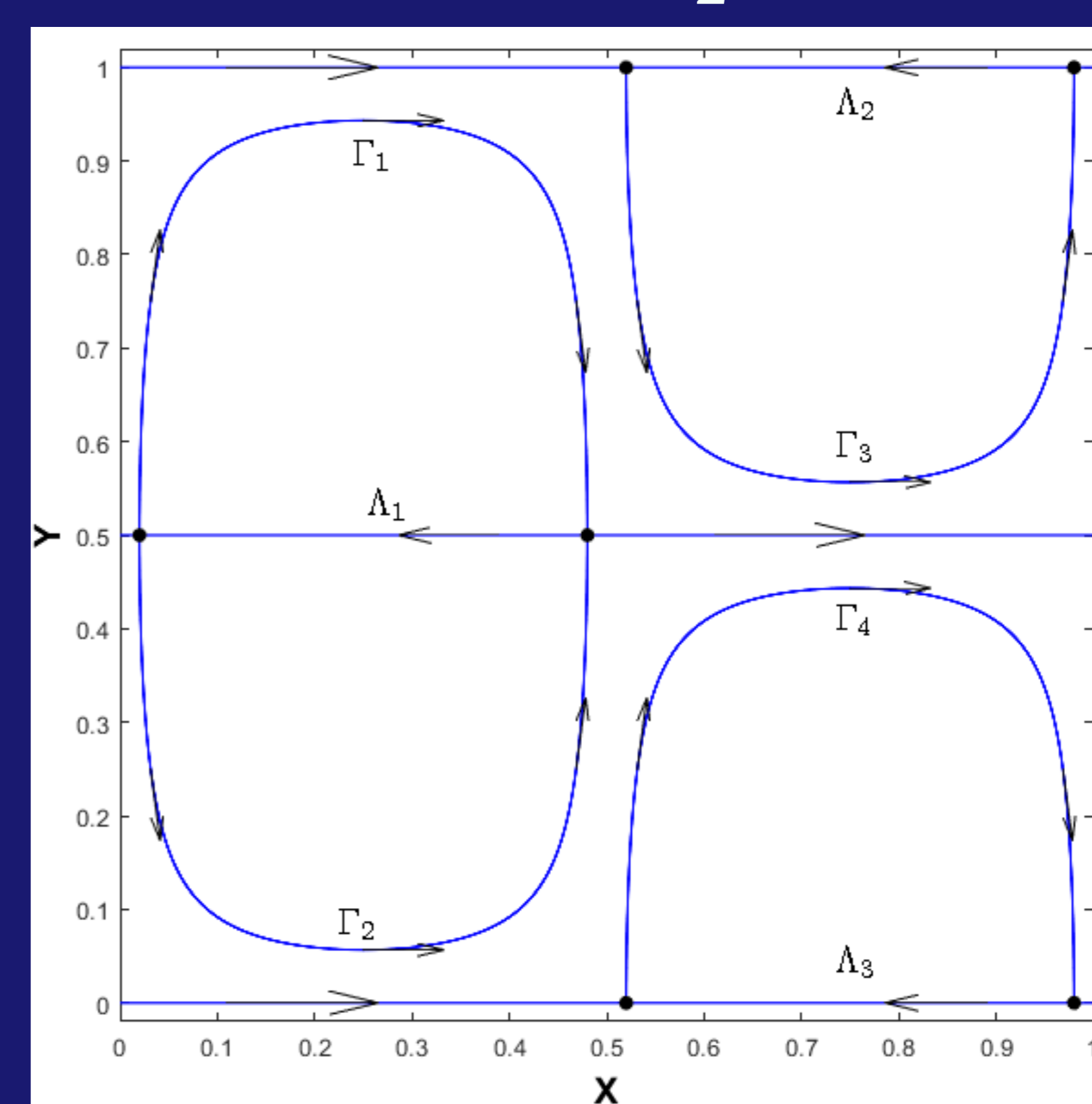


Figura 3: Conexões heteroclínicas para o sistema 2 no quadrado Ω . As curvas Γ_1 , Γ_2 e Λ_1 correspondem a $m = 1$. As curvas Γ_3 e Λ_2 correspondem a $m = 2$. Finalmente, Γ_4 e Λ_3 correspondem a $m = 0$. Usamos o valor $\alpha = 0.1$.

A medida do conjunto de condições iniciais de trajetórias não confinadas, $A_1^e(\alpha)$, é calculada usando a relação

$$A_1^e(\alpha) = 1 - 4A_{\Gamma_1\Lambda_1}(\alpha), \quad (3)$$

onde $A_{\Gamma_1\Lambda_1}(\alpha)$ é a área limitada por Γ_1 e Λ_1 . Essa última área é

$$A_{\Gamma_1\Lambda_1}(\alpha) = \int_{0.5}^{y_{max}} \left[0.5 - \frac{1}{\pi} \arcsen \left(\frac{0.5\alpha - \alpha y}{\sin(2\pi y)} \right) \right] dy.$$

O valor y_{max} é a componente y da interseção de Γ_1 com $x = 0.25$.

A pergunta que surge agora é: existe uma estratégia melhor para que aumente a área das condições iniciais de trajetórias não confinadas?

2 Segundo Protocolo: Natação com modulação temporal senoidal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\pi \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) + \alpha + \varepsilon \sin(\omega t), \\ \dot{y} &= -2\pi \cos(2\pi x) \sin(2\pi y). \end{aligned} \quad (4)$$

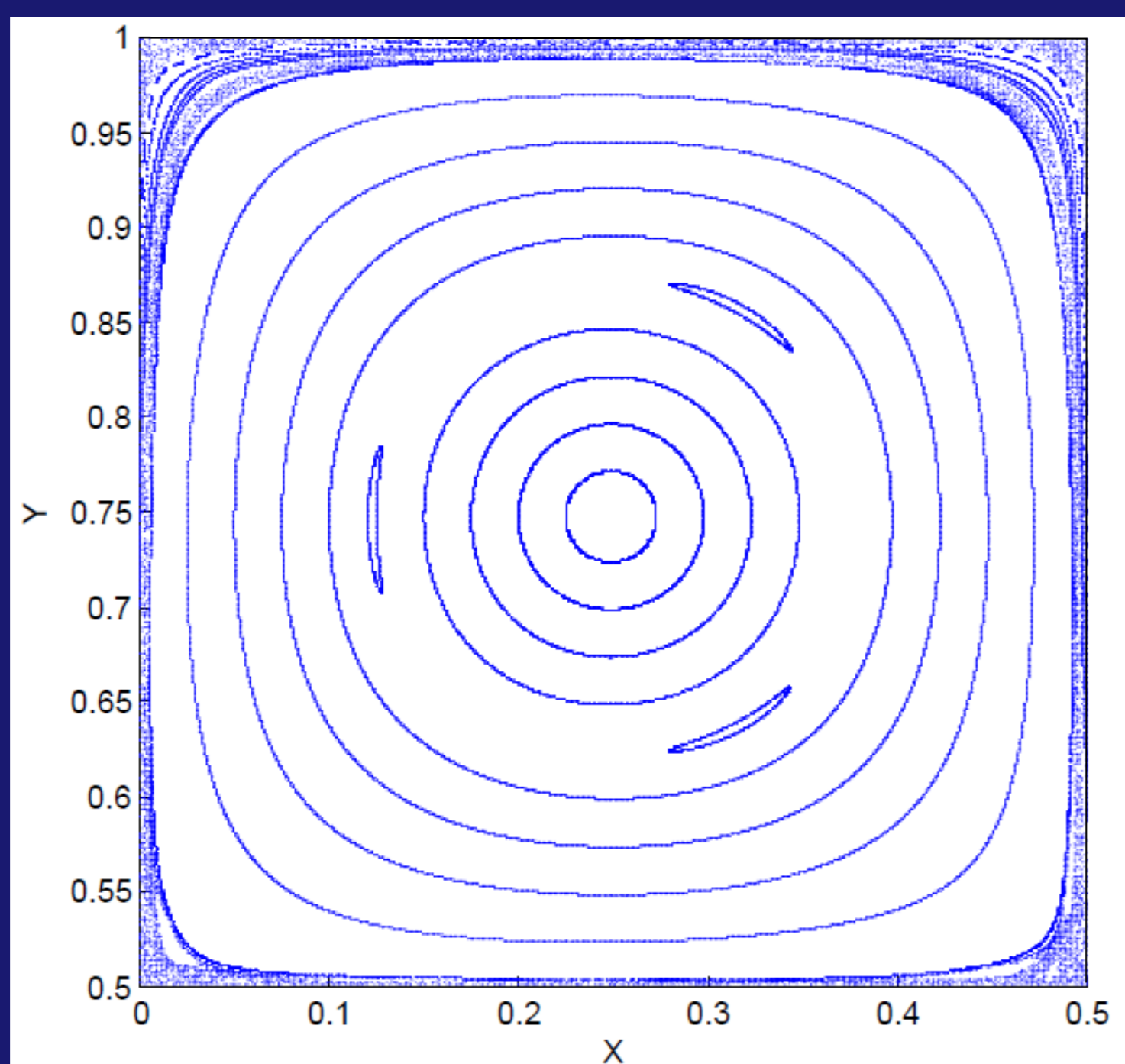


Figura 4: Mapa de Poincaré do sistema (4) no quadrado $0 \leq x \leq 0.5 \leq y \leq 1$. Os parâmetros são $\alpha = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$ e $\omega = 100$.

Também existem trajetórias confinadas e trajetórias que escapam, essas últimas podem ser tanto regulares quanto caóticas e sua existência é demonstrada usando el método de Melnikov.

A função de Melnikov para este sistema é dada por

$$\mathcal{M}^\alpha(\theta_0) = 4\pi \cos(\omega\theta_0) \mathcal{I}_i^\alpha(\omega), \quad (5)$$

onde

$$\mathcal{I}_i^\alpha(\omega) = \int_0^{+\infty} \cos(2\pi x_i^\alpha(t)) \sin(2\pi y_i^\alpha(t)) \sin(\omega t) dt,$$

e $(x_i^\alpha(t), y_i^\alpha(t))$ é a parametrização da separatriz λ_i . Para as separatrizes Λ_i a função de Melnikov é nula. Para valores de α e ω tais que a integral anterior é diferente de zero podemos concluir que existe caos em vizinhanças das separatrizes Γ_i .

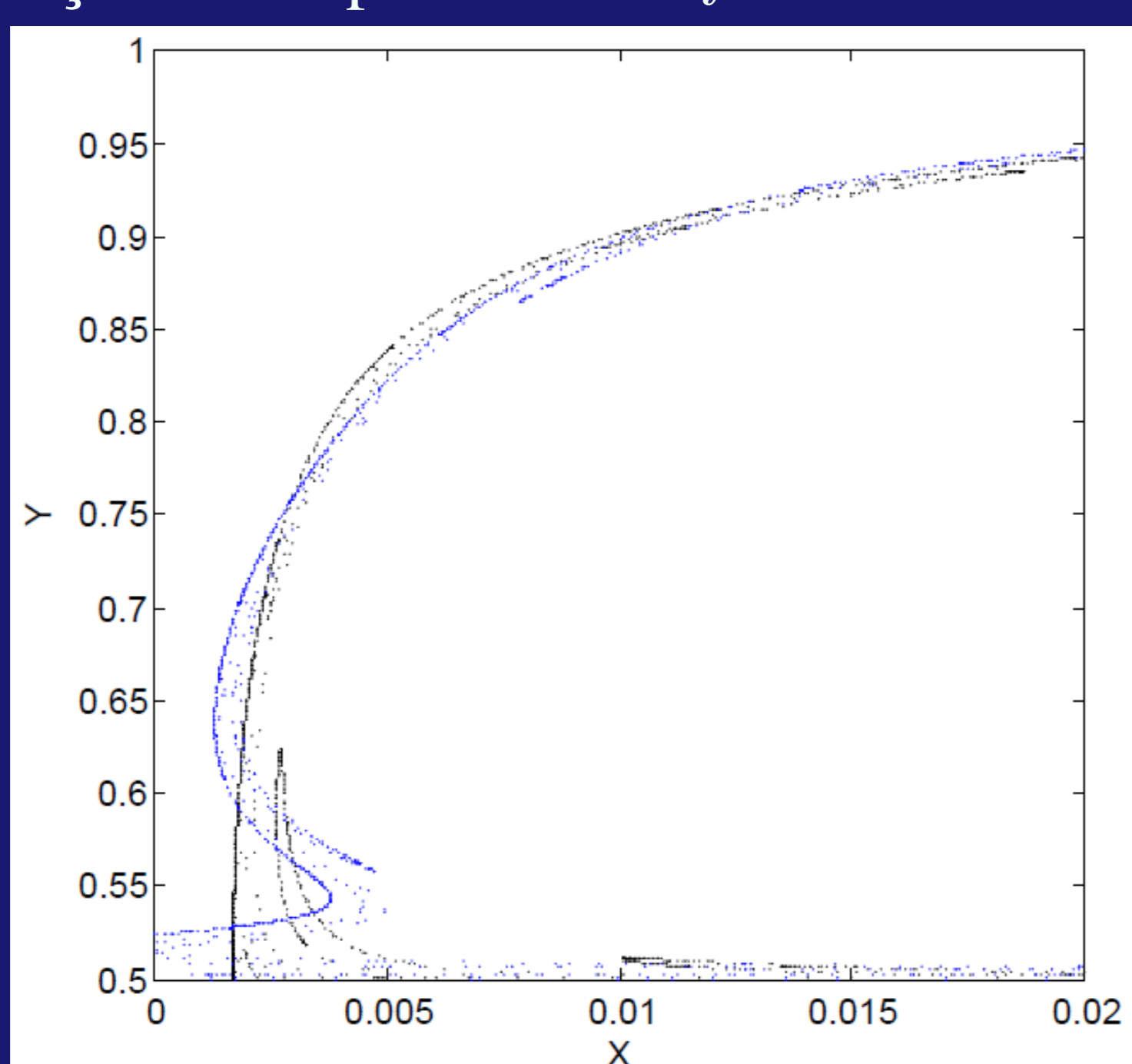


Figura 5: Emaranhamento heteroclínico do mapa de Poincaré do segundo protocolo para $\alpha = \varepsilon = 0.1$ e $\omega = 100$. Em preto, um ramo da variedade instável do ponto fixo $(0.002533, 0.5)$. Em azul, um ramo da variedade estável do ponto fixo $(0.497467, 0.5)$ (que não aparece na figura).

Para obter a curva que separa o movimento confinado do movimento que escapa usamos o mapa da separatriz o qual é obtido considerando a interseção das trajetórias do mapa de Poincaré com uma superfície fixada no espaço de fases. Em cada interseção (x_n, y_n) calculamos o valor da função corrente $\psi_\alpha^n = \psi_\alpha(x_n, y_n)$. Logo o mapa da separatriz é dado por

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{n+1} &= \psi_\alpha^n + \varepsilon \mathcal{M}^\alpha(t_n), \\ t_{n+1} &= t_n + T(\psi_\alpha^{n+1}), \end{aligned} \quad (6)$$

onde $\mathcal{M}^\alpha(t_n)$ é a função de Melnikov e $T(\psi_\alpha^{n+1})$ é o período da função corrente ψ_α^{n+1} .

Não temos uma expressão analítica para $T(\psi_\alpha^{n+1})$. Porém, a dinâmica é muito lenta em vizinhanças dos pontos hiperbólicos, então fazemos uma expansão polinomial de Taylor ao redor desses pontos. Logo

$$\psi_\alpha(x_e + h, y_e + k) \approx \frac{\alpha m}{2} + chk, \quad m \in \{0, 1, 2\},$$

onde $c = \pm 2\pi \sqrt{\pi^2 - \alpha^2}$, assim campo de velocidades é aproximadamente dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -c(x - x_h), \\ \dot{y} &= c(y - y_h). \end{aligned} \quad (7)$$

Com as equações anteriores aproximamos o período usando a integral

$$T = -\frac{2}{c} \int_{u_0}^{u_1} \frac{d\xi}{\xi - x_h},$$

onde u_0 e u_1 são as coordenadas x da interseção das trajetórias de 7 com a vizinhança do ponto hiperbólico (x_h, y_h) .

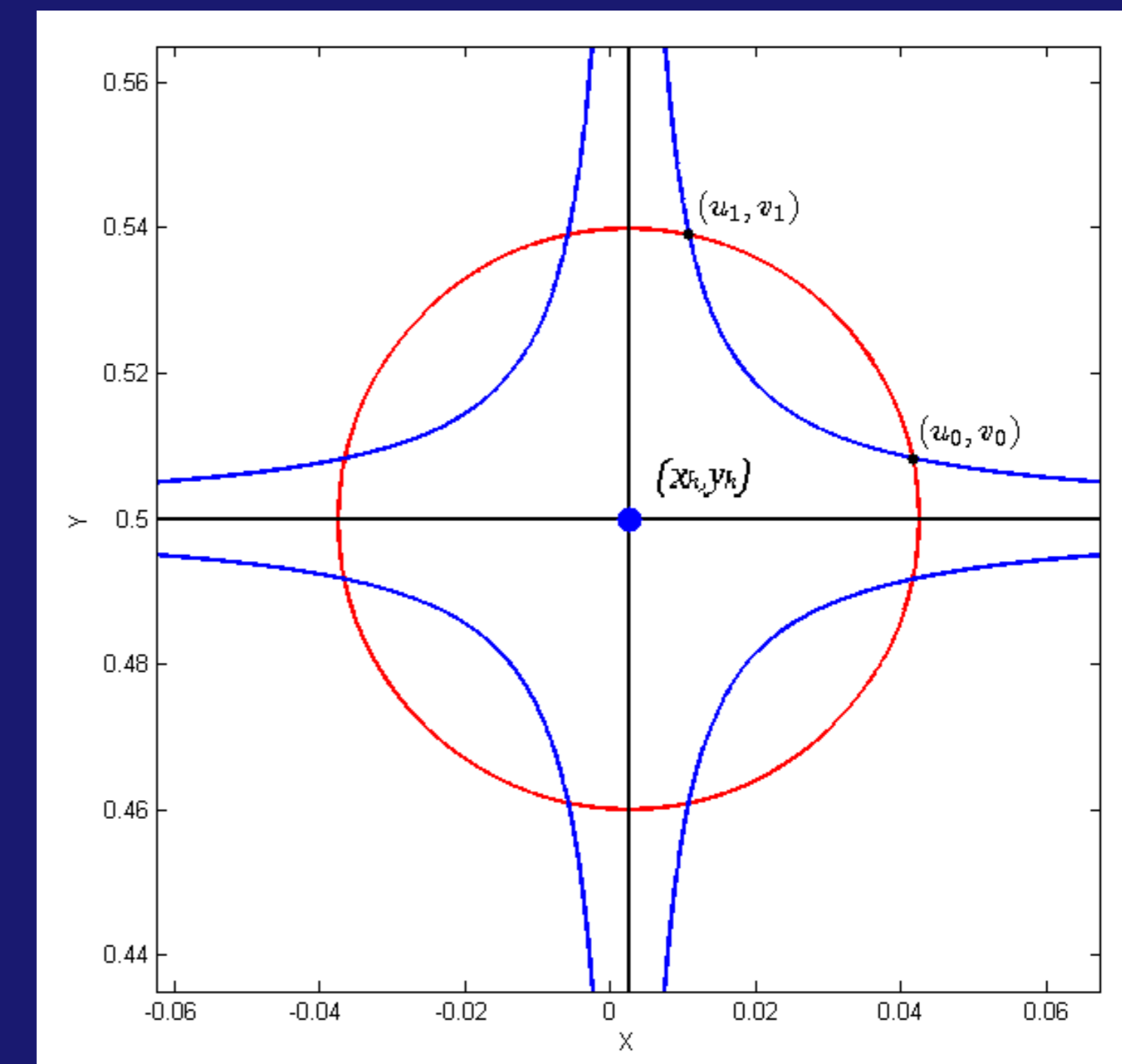


Figura 6: Os pontos de interseção de uma trajetória de 7 com uma vizinhança do ponto hiperbólico (x_h, y_h) são dados por (u_0, v_0) e (u_1, v_1) .

Assim obtemos uma expressão aproximada para o mapa da separatriz

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{n+1} &\approx \psi_\alpha^n + \varepsilon \mathcal{M}^\alpha(t_n), \\ t_{n+1} &\approx t_n - \frac{2}{c} \ln \left| \frac{2\psi_\alpha^{n+1} - \alpha m}{2c(u_0 - x_h)(v_1 - y_h)} \right|. \end{aligned} \quad (8)$$

Para calcular a curva que separa o movimento confinado do que escapa usamos o critério

$$\max \left| \frac{dt_{n+1}}{dt_n} - 1 \right| = 1. \quad (9)$$

Do critério anterior obtemos duas curvas

$$\psi_\alpha^\pm = \frac{\alpha m}{2} \pm \frac{4\varepsilon\omega \mathcal{I}_i^\alpha(\omega)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}. \quad (10)$$

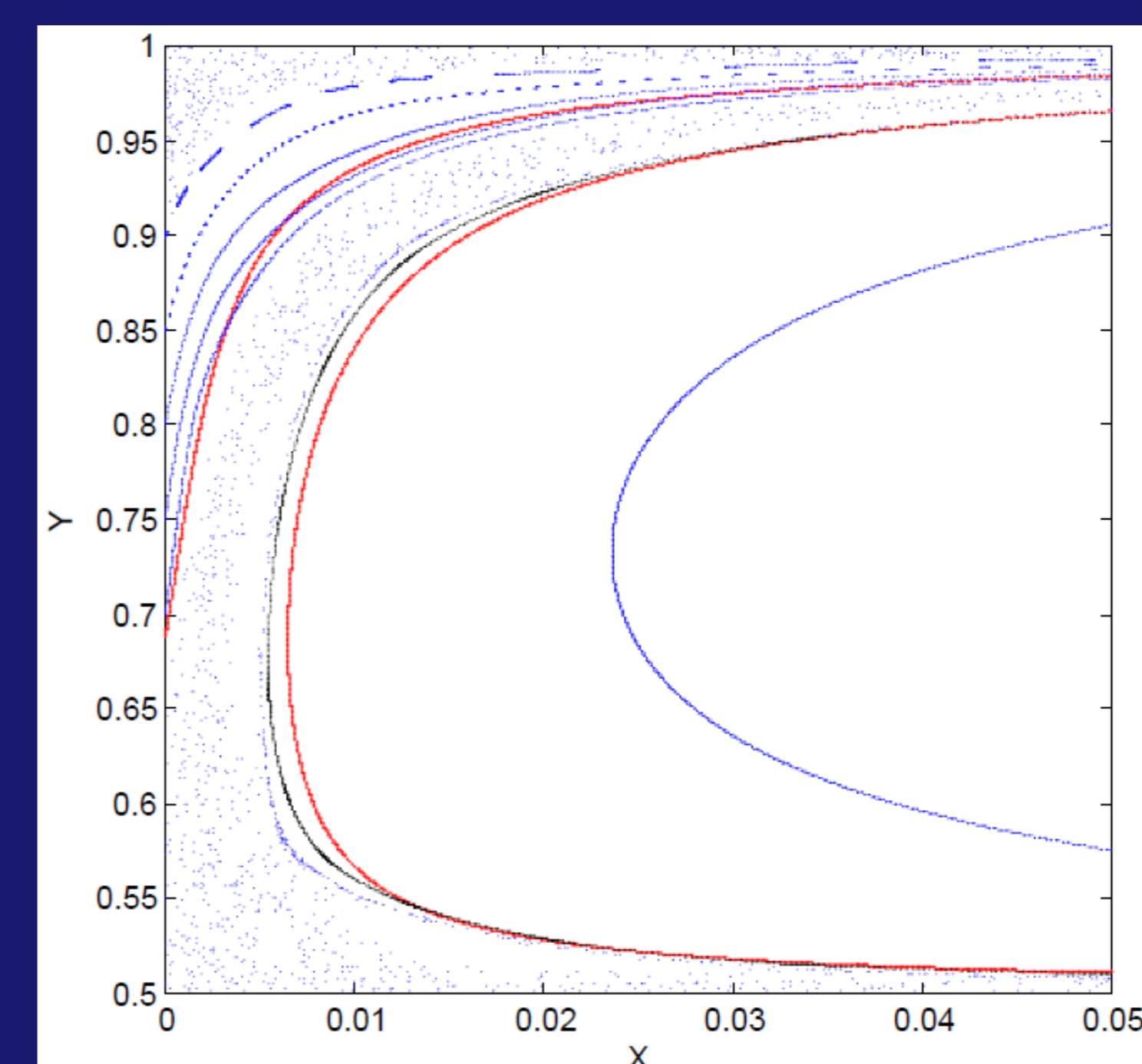


Figura 7: Curvas separatrizes do segundo protocolo na região $0 \leq x \leq 0.05$, $0.5 \leq y \leq 1$. Em preto, a separatriz encontrada numericamente. Em vermelho, as encontradas usando o mapa da separatriz. Os valores dos parâmetros são $\alpha = \varepsilon = 0.1$ e $\omega = 100$.

Em particular, se $m = 1$, temos que escolher ψ_α^- já que é a que está dentro da região limitada por Γ_1 e Λ_1 , i.e. é a curva que divide a região de confinamento da região de escape. A área dentro da curva ψ_α^- é dada por

$$A_{\psi_\alpha^-}(\alpha, \varepsilon, \omega) = \int_{y_{min}}^{y_{max}} \left[0.5 - \frac{1}{\pi} \arcsen \left(\frac{\psi_\alpha^- - \alpha y}{\sin(2\pi y)} \right) \right] dy.$$

Os valores y_{min} e y_{max} são as componentes y da interseção de Γ_1 com a reta $x = 0.25$, esses valores são calculados numericamente.

Logo, a área da região de escape é dada por

$$A_2^e(\alpha, \varepsilon, \omega) = 1 - 4A_{\psi_\alpha^-}(\alpha, \varepsilon, \omega).$$

Não é complicado demonstrar que os resultados do mapa da separatriz são válidos só se a desigualdade

$$16\omega\varepsilon|\mathcal{I}_i^\alpha(\omega)| \leq \alpha\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} \quad (11)$$

for satisfeita.

3 Resultados Gerais e Numéricos

Todos os cálculos anteriores podem ser feitos para diferentes valores dos parâmetros α , ε e ω . No mapa de cores da figura 8 vemos a percentagem de variação da área de condições iniciais de trajetórias não confinadas comparando ambos os modelos. Essa percentagem é dada por

$$\Delta A_e = \left(\frac{A_2^e(\alpha, \varepsilon, \omega) - A_1^e(\alpha)}{A_1^e(\alpha)} \right) \times 100.$$

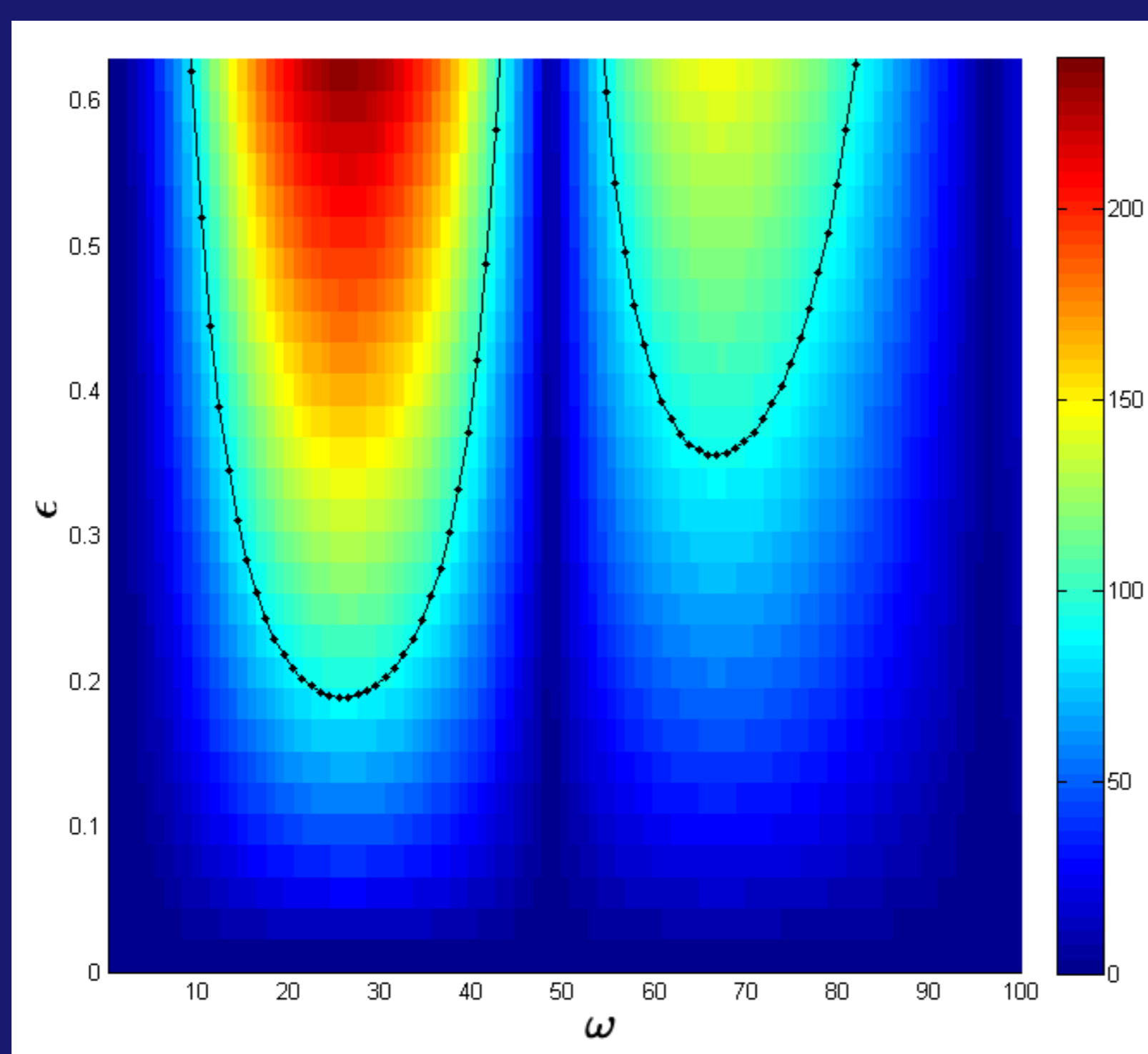


Figura 8: Mapa de cores mostrando a percentagem de aumento da área do conjunto de condições iniciais de trajetórias não confinadas entre os dois protocolos estudados. Neste caso temos $\alpha = 0.1$, $\varepsilon \in [0, 0.1]$ and $\omega \in [0, 100]$. A região abaixo a curva preta é a região onde os parâmetros satisfazem a desigualdade 11.

Conclusões e Perspectivas

Usando o método de Melnikov se demonstrou, para o mapa de Poincaré do segundo protocolo, que existe caos perto da separatriz. Logo, este protocolo apresenta três tipos de trajetórias: trajetórias regulares e caóticas que escapam e trajetórias regulares confinadas.

O mapa da separatriz fornece uma boa aproximação para as curvas que encerram a região caótica e assim é possível mostrar que a área das condições iniciais que levam a trajetórias que escapam aumentou no segundo protocolo. Nosso principal resultado foi a quantificação analítica desse aumento.

De uma forma mais geral este trabalho pode ter aplicações também sugerindo estratégias de natação, por exemplo, para pequenos

submarinos-robôs com velocidade de propulsão pequena quando comparada à velocidade do fluxo convectivo do oceano.

As ideias apresentadas sugerem algumas extensões, por exemplo, investigar um terceiro protocolo consistindo de uma auto-propulsão com velocidade estocástica com média $\alpha > 0$ ao longo da direção pretendida.

Podemos investigar também novos protocolos para partículas que conseguem obter informação local sobre o escoamento (por exemplo, gradientes de pressão).

Outra idéia é obter o protocolo ótimo e introduzir novas bases de comparação entre protocolos, por exemplo a velocidade média.

Finalmente, podemos estudar um modelo de natação onde as partículas não são pontuais mas tem forma específica.

Referências

- [1] ANGILELLA J. R., Asymptotic properties of wall-induced chaotic mixing in point vortex pairs, *Physics of Fluids* 23, 113602 (2011).
- [2] CHERNIKOV A. A. ET AL, Lagrangian turbulence in nonstationary 2-D flows, *Chaos* 1: 206-211 (1991).
- [3] CHIRIKOV B. V., A universal instability of many - dimensional oscillator systems, *Physical Reports* 52(5): 263-379, (1979).
- [4] HOLMES P., Poincaré, Celestial Mechanics, Dynamical Systems Theory and “Chaos”, *Physics Reports* 193(3): 137-163 (1990).
- [5] KUZNETSOV L. & ZASLAVSKY G., Regular and chaotic advection in the flow field of a three-vortex system, *Physical Review E*, 58(6): 7330-7349 (1998).
- [6] MELNIKOV V. K., On the stability of the center for time periodic perturbations, *Trans. Moscow Math Soc.*, 12: 1-57 (1963).
- [7] ROM - KEDAR V., Homoclinic tangles-classification and applications, *Nonlinearity*, 7: 441-473 (1994).
- [8] ROM-KEDAR V. ET AL., An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow, *J. Fluid Mech.*, 214: 347-394 (1990).
- [9] TRUEBA J. L. ET AL., On the estimate of the stochastic layer width for a model of tracer dynamics, *Chaos*, 13(3): 866-873 (2003).
- [10] WEISS, J. B. & KNOBLOCH, E., Mass transport and mixing by modulated travelling waves, *Physical Review A*, 40(5): 2579-2589 (1989).
- [11] ZASLAVSKY G. M. & FILONENKO N. N., Stochastic instability of trapped particles and conditions of application of the quasi-linear approximation, *Sov. Phys. JETP*, 27: 851-857 (1968).