Zeros de Polinômios Ortogonais Clássicos: Uma Extensão do Teorema de Stieltjes

Alexandre Suzuki

Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

alexandresuzuki_10@hotmail.com

Resumo

O propósito deste trabalho é estender um resultado clássico sobre monotonicidade de zeros de polinômios ortogonais clássicos de variável contínua para monotonicidade de zeros de polinômios ortogonais clássicos de variável discreta

Introdução

A monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais sobre a reta real tem sido estudada desde o final do século XIX quando A. Markov estabeleceu, através da função peso da relação de ortogonalidade, uma condição de suficiência para isso [2, p. 168] (ver também [1, Teorema 7.1.1] e [6, Teorema 6.12.1]). Como consequência dessa condição, ele obteve a monotonicidade dos zeros dos polinômios de Jacobi e dos polinômios de Gegenbauer. Como descrito em [6, p. 121], a prova fornecida por A. Markov para a monotonicidade dos zeros dos polinômios de Gegenbauer está incorreta. De fato, tal prova segue imediatamente de um resultado de T. J. Stieltjes usando uma diferente abordagem, baseada na equação diferencial que tais polinômios satisfazem [4, Seções 3 e 4]. Aparentemente T. J. Stieltjes desconhecia o trabalho de A. Markov conforme descrito em carta enviada a Hermite em Janeiro de 1887 [5, Carta 105]. A principal ideia de Stieltjes [4] foi provar que se H é uma matriz simétrica definida positiva com elementos fora da diagonal principal não positivos, então sua inversa H^{-1} é também definida positiva. Nosso objetivo é estender o resultado de Stieltjes para uma equação de diferenças para obter a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais de variável discreta.

Resultado Principal

Suponha que $y(x,\alpha)$ seja uma solução polinomial de uma equação de diferenças da forma

$$\Delta\nabla y(x) + P(x,\alpha)\Delta y(x) + Q(x,\alpha)y(x) = 0, \qquad (1)$$

onde Δ e ∇ denotam os operadores de diferenças progressiva e regressiva, respectivamente, ou seja,

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \quad \text{e} \quad \nabla f(x) = f(x) - f(x-1).$$

Se $y(x,\alpha)$ possui n zeros distintos $x_k = x_k(\alpha)$, $k = 1,\ldots,n$, os quais não coincidem com os pontos de singularidade de $P(x,\alpha)$, então vale o seguinte:

TEOREMA 1. *Seja $P(x,\alpha)$ uma função diferenciável e decrescente de x para cada α, e diferenciável e crescente (decrescente) de α para cada x. Então os zeros de $y(x,\alpha)$ crescem (decrescem) com relação ao parâmetro α.*

Prova. Fazendo $x = x_j = x_j(\alpha)$, $j = 1,\ldots,n$, em (1), obtemos

$$-P(x_j,\alpha) = \frac{\Delta\nabla y(x_j)}{\Delta y(x_j)} = 1 + \frac{\prod_{k=1}^{n}(x_j - x_k - 1)}{\prod_{k=1}^{n}(x_j - x_k + 1)}. \qquad (2)$$

Derivando ambos os lados de (2) com relação a α, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_j,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\frac{dx_k}{d\alpha},$$

onde

$$a_{jj} = -\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial x_j}(x_j,\alpha) - \prod_{i=1}^{n}\frac{(x_j-x_i)^2-1}{(x_j-x_i+1)^2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{(x_j-x_k)^2-1} > 0,$$

$$a_{jk} = \frac{1}{(x_j-x_k)^2-1}\prod_{i=1}^{n}\frac{(x_j-x_i)^2-1}{(x_j-x_i+1)^2} < 0, \;\; j \neq k,$$

pois $|x_j - x_i| > 1$, $\forall i \neq j$, e $P(x,\alpha)$ é uma função decrescente de x para todo α. Considere a matriz $A = [a_{jk}]$ e defina o sistema $AX = B$. Note que, na matriz A, todos os elementos da diagonal principal são positivos e todos os elementos fora da diagonal principal são negativos. Pode-se mostrar que a matriz A é estritamente diagonal dominante. Logo, existe a matriz inversa $A^{-1} = [u_{jk}]$ de A e ela possui apenas elementos positivos. Assim, podemos reescrever o sistema $AX = B$ como $X = A^{-1}B$, ou seja,

$$\frac{dx_j}{d\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} u_{jk}\frac{\partial P}{\partial \alpha}(x_k,\alpha), \;\; j = 1,\ldots,n,$$

de onde segue o resultado desejado.

Aplicações

O problema de encontrar soluções polinomiais da equação de diferenças

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0,$$

onde $\sigma(x)$ é um polinômio de grau no máximo dois, $\tau(x)$ é um polinômio de grau no máximo um e λ é uma constante, foi tratado, por exemplo, em [3]. As únicas soluções polinomiais existentes nesse caso são chamadas de famílias de polinômios ortogonais clássicos de variável discreta, a saber: Charlier, Meixner, Kravchuk e Hahn.

EXEMPLO 1. *Seja $c_n^{(\mu)}(x)$ o n-ésimo polinômio ortogonal de Charlier. Então todos os seus zeros são funções crescentes μ, para $\mu \in (0,\infty)$.*

EXEMPLO 2. *Seja $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$ o n-ésimo polinômio ortogonal de Meixner. Então todos os seus zeros são funções crescentes tanto de $\gamma \in (0,\infty)$ como de $\mu \in (0,1)$.*

EXEMPLO 3. *Seja $k_n^{(p)}(x,N)$ o n-ésimo polinômio ortogonal de Kravchuk. Então todos os seus zeros são funções crescentes de p, para $p \in (0,1)$.*

EXEMPLO 4. *Seja $h_n^{(\alpha,\beta)}(x,N)$ o n-ésimo polinômio ortogonal de Hahn. Então todos os seus zeros são funções crescentes de $\beta \in (-1,\infty)$ e funções decrescentes de $\alpha \in (-1,\infty)$.*

Agradecimentos

Este trabalho foi desenvolvido em parceria com os professores Kenier Castillo e Fernando Rodrigo Rafaeli. Agradecemos o apoio do CNPq e da FAPEMIG (Demanda Universal, APQ-03782-18).

Referências

[1] M. E. H. ISMAIL, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Volume 98 of Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[2] A. MARKOV, *Sur les racines de certaines équations (second note)*, Math. Ann., 27:177–182, 1886.

[3] A. F. NIKIFOROV, S. K. SUSLOV AND V. B. UVAROV, *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[4] T. J. STIELTJES, *Sur les racines de l'équation $X_n = 0$*, Acta Math., 9:385–400, 1887.

[5] T. J. STIELTJES AND CH. HERMITE, *Correspondence d'Hermite et de Stieltjes*, Vol. I, II. Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[6] G. SZEGŐ, *Orthogonal polynomials*, Vol. 23. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 4th edition, 1975, 1939.