# As Infinitas Trincas Pitagóricas de Euclides


## Alessandro Firmiano, João Paulo M. Santos e Maurício E. Eloy

Academia da Força Aérea - AFA

firmianoafj@fab.mil.br



### Resumo

Inspirado na demonstração de Euclides (300 aC) para a questão das infinitas trincas pitagóricas, foi estabelecido fórmulas fechadas para associar cada número natural $a$ à uma trinca na forma $(a, b, b+1)$ ou $(a, b, b+2)$ mediante a sua paridade. O trabalho também investigou a totalidade e critérios de formação das trincas $(a, b, b+k)$ para cada valor de $a \in \mathbb{N}$, evidenciando um interessante critério de primalidade baseado na unicidade da Trinca Pitagórica de Euclides.


### Introdução

Nas trincas $(a, b, b+1)$, $(b+1)^2 - b^2 = a^2$, ou seja, $a^2 = 2b+1$, ie. $a$ é ímpar e $c = b+1 = \dfrac{a^2-1}{2} + 1 = \dfrac{a^2+1}{2}$. Portanto, $a = 2n+1$ e $c = C(n) = 1 + 2n + 2n^2, \forall\, n \in \mathbb{N}$. E ainda,

*i.* Se $a \equiv 1 \; mod\; 10$, então $c = C^1(n) = 50n^2 - 90n + 41$
*ii.* Se $a \equiv 3 \; mod\; 10$, então $c = C^3(n) = 50n^2 - 70n + 25$
*iii.* Se $a \equiv 5 \; mod\; 10$, então $c = C^5(n) = 50n^2 - 50n + 13$
*iv.* Se $a \equiv 7 \; mod\; 10$, então $c = C^7(n) = 50n^2 - 30n + 5$
*v.* Se $a \equiv 9 \; mod\; 10$, então $c = C^9(n) = 50n^2 - 10n + 1$

**P1.** Se $d_1 + d_2 = 10$, então $C^{d_1}(n+1) = C^{d_2}(-n), \forall\, n \in \mathbb{Z}$

**P2.** $(C^{2i+1}(n+1) - C^{2i+1}(n)) - (C^{2i-1}(n+1) - C^{2i-1}(n)) = (C^1(n+2) - C^1(n+1)) - (C^9(n+1) - C^9(n)) = 20$ para $i = 1, 2, 3, 4$ e $\forall n \in \mathbb{N}$

Nas trincas $(a, b, b+2)$, $(b+2)^2 - b^2 = 4b + 4 = a^2$, ie. $a = 2n$ e $c = b + 2 = C_p(n) = n^2 + 1$. Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos a:

**P3.** $[C_p(n+6) - C_p(n+1)] - [C_p(n+5) - C_p(n)] = 10$

A Tabela 1 organiza as 40 primeiras trincas pitagóricas de Euclides.

| Ímpar | Cat B | Hip C | P2 | Par | Cat B | Hip C | P3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | **1** | **60** | 2 | 0 | **2** | **35** |
| 3 | 4 | **5** | **80** | 4 | 3 | **5** | **45** |
| 5 | 12 | **13** | **100** | 6 | 8 | **10** | **55** |
| 7 | 24 | **25** | **120** | 8 | 15 | **17** | **65** |
| 9 | 40 | **41** | **140** | 10 | 24 | **26** | **75** |
| 11 | 60 | 61 | 160 | 12 | 35 | **37** | 85 |
| 13 | 84 | 85 | 180 | 14 | 48 | **50** | 95 |
| 15 | 112 | 113 | 200 | 16 | 63 | **65** | 105 |
| 17 | 144 | 145 | 220 | 18 | 80 | **82** | 115 |
| 19 | 180 | 181 | 240 | 20 | 99 | **101** | 125 |
| 21 | 220 | 221 | 260 | 22 | 120 | 122 | 135 |
| 23 | 264 | 265 | 280 | 24 | 143 | 145 | 145 |
| 25 | 312 | 313 | 300 | 26 | 168 | 170 | 155 |
| 27 | 364 | 365 | 320 | 28 | 195 | 197 | 165 |
| 29 | 420 | 421 | 340 | 30 | 224 | 226 | 175 |
| 31 | 480 | 481 | 360 | 32 | 255 | 257 | 185 |
| 33 | 544 | 545 | 380 | 34 | 288 | 290 | 195 |
| 35 | 612 | 613 | 400 | 36 | 323 | 325 | 205 |
| 37 | 684 | 685 | 420 | 38 | 360 | 362 | 215 |
| 39 | 760 | 761 | 440 | 40 | 399 | 401 | 225 |

**Tabela 1:** 40 Trincas de Euclides conforme a paridade de $a$

Nas trincas $(a, b, b+k)$, $(b+k)^2 - b^2 = \underbrace{2bk}_{par} + k^2 = a^2$, ou seja, $b = \dfrac{a^2 - k^2}{2k} \in \mathbb{N}$ e ainda, $a$ e $k$ possuem a mesma paridade.

$k = 2m$, $a^2$ é par e $b = \dfrac{4n^2 - 4m^2}{4m} = \dfrac{n^2 - m^2}{m}$. Como $b \in \mathbb{N}$, segue que $m|(n-m)(n+m)$ e $1 \leqslant m \leqslant n$ $\quad (i.)$

$k = 2m+1$, $a^2$ é ímpar e $b = \dfrac{2(n-m)(n+m+1)}{2m+1}$, ou seja, $(2m+1)|(n-m)(n+m+1)$ e $0 \leqslant m \leqslant n$ $\quad (ii.)$

### Resultados

Um código Python auxiliou na implementação de valores decrescente de $m$ que satisfazem os critérios de divisibilidade $(i.)$ e $(ii.)$ fornecendo as seguintes trincas $(a, b, b+k)$ e a dispersão $(a, b)$ (Fig. 1)

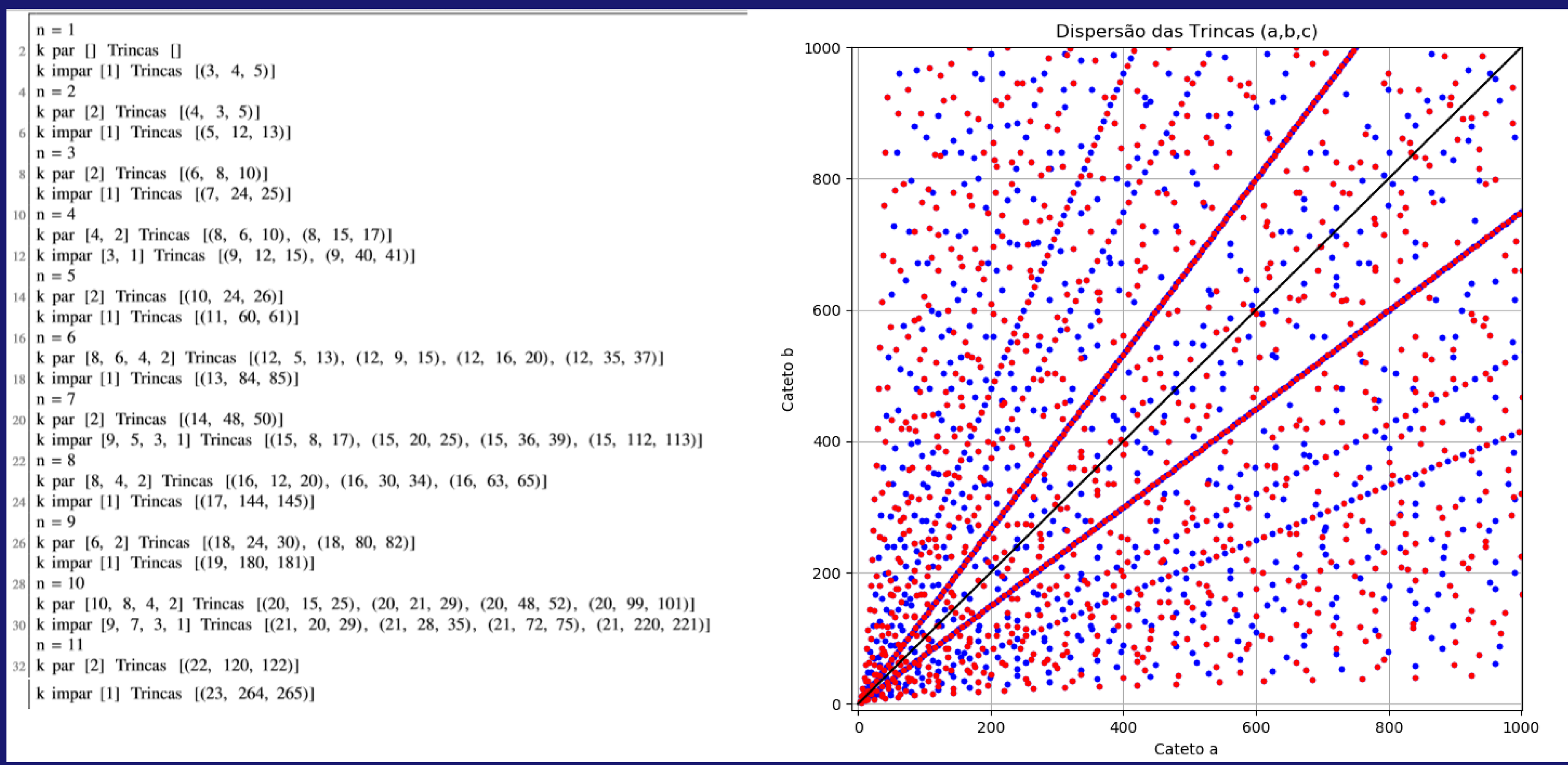
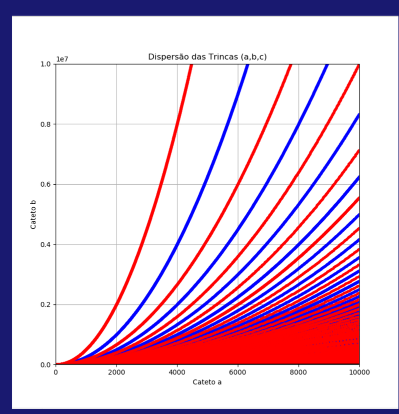



**Figura 1:** Trincas $(a, b, b+k)$ e gráficos de dispersão dos catetos

$\left(2n+1, \frac{2(n-m)(n+m+1)}{2m+1}, b+2m+1\right)$ em coordenadas vermelhas e $0 \leqslant m < n$, e trincas $\left(a = 2n, b = \dfrac{n^2 - m^2}{m}, c = b + 2m\right)$ em coordenadas azuis para $1 \leqslant m < n$.



### Conjecturas

1. $k = 1$ é solução única de $(a, b, b+k)$ se, e somente se, $a$ é primo.
2. $k = 2$ é solução única de $(a, b, b+k)$ se, e somente se, $\frac{a}{2}$ é primo.
3. Se $c \geqslant 5$ provém de valores alternados da sequência de Fibonaci, então $k = \sqrt{c-b}$ forma outra sequência de Fibonacci (Tabela 2).

| catA | catB | FIBONACCI | $c-b=k^2$ | k | catA | catB | FIBONACCI | $c-b=k^2$ | k |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | | | 33553 | 67104 | 75025 | 7921 | 89 |
| | | 1 | | | | | 121393 | | |
| 0 | 2 | 2 | | | 87840 | 175682 | 196418 | 20736 | 144 |
| | | 3 | | | | | 317811 | | |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 1 | 229971 | 459940 | 514229 | 54289 | 233 |
| | | 8 | | | | | 832040 | | |
| 5 | 12 | 13 | 1 | 1 | 602069 | 1204140 | 1346269 | 142129 | 377 |
| | | 21 | | | | | 2178309 | | |
| 16 | 30 | 34 | 4 | 2 | 1576240 | 3152478 | 3524578 | 372100 | 610 |
| | | 55 | | | | | 5702887 | | |
| 39 | 80 | 89 | 9 | 3 | 4126647 | 8253296 | 9227465 | 974169 | 987 |
| | | 144 | | | | | 14930352 | | |
| 105 | 208 | 233 | 25 | 5 | 10803705 | 21607408 | 24157817 | 2550409 | 1597 |
| | | 377 | | | | | 39088169 | | |
| 272 | 546 | 610 | 64 | 8 | 28284464 | 56568930 | 63245986 | 6677056 | 2584 |
| | | 987 | | | | | 102334155 | | |
| 715 | 1428 | 1597 | 169 | 13 | 74049691 | 148099380 | 165580141 | 17480761 | 4181 |
| | | 2584 | | | | | 267914296 | | |
| 1869 | 3740 | 4181 | 441 | 21 | 193864605 | 387729212 | 433494437 | 45765225 | 6765 |
| | | 6765 | | | | | 701408733 | | |
| 4896 | 9790 | 10946 | 1156 | 34 | 507544128 | 1015088254 | 1134903170 | 119814916 | 10946 |
| | | 17711 | | | | | 1836311903 | | |
| 12815 | 25632 | 28657 | 3025 | 55 | 1328767775 | 2657535552 | 2971215073 | 313679521 | 17711 |
| | | 46368 | | | 3478759201 | 6957518400 | 7778742049 | 821223649 | 28657 |

**Tabela 2:** Trincas $(a, b, b+k^2)$ e valores de $k$ formando a sequência de Fibonacci

### Considerações Finais

A simplicidade da matemática aqui empregada, tais como, paridade de $n$ em função de $n^2$, relações de recorrência, divisibilidade e aritmética modular, unidos às técnicas de programação e visualização gráfica, convergiram numa metodologia robusta que forneceu interessantes propriedades extraídas de simples trincas pitagóricas $(a, b, b+k)$.

### Referências


[1] L. E. DICKSON, *History of the Theory Numbers (Vol. II.)*, New York: Chelsea Publishing Company, 1971.

[2] S. SINGH, *O Último Teorema de Fermat*, Rio de Janeiro: Ed. Record, 1997.

[3] E.W. WEISSTEIN, *Pythagorean Theorem.* A Wolfram Web Resource: From MathWorld. 2019. (http://mathworld.wolfram.com/ acesso em 10 mai 19).