A Esfera S^2 vista como um Espaço Quociente

Alef Alves Fidelis & Francielle Rodrigues de Castro Coelho

Universidade Federal de Uberlândia - *Campus* Santa Mônica

alef.fidelis222530@gmail.com

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Resumo

Uma grande vontades da humanidade é estudar as formas dos objetos ao nosso redor, por exemplo as esferas e os círculos. Estas descreviam a perfeição da natureza, para os gregos, como o movimento dos planetas. Desde a antiguidade isso instiga os matemáticos, portanto, nada mais justo que estudarmos em nosso dia-a-dia. Pois bem, trago uma relação íntima entre dois espaços topológicos demasiado cotidiano, um disco, e uma esfera. O que poderia estas figuras icônicas terem em comum?

O objetivo deste trabalho é estudar a relação que existe entre o disco e a esfera S^2. Mais especificamente, vamos mostrar que esses espaços topológicos são homeomorfos, ou seja, vamos provar que a esfera S^2 pode ser visto como um espaço quociente X^*, onde X é o disco em $\mathbb{R}^2$.

Espaços Topológicos

Definição: Uma topologia em um conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tais que:

i) O $\emptyset$ e o X estão em $\mathcal{T}$.

ii) A união de elementos de qualquer subcoleção de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$.

iii) A intersecção dos elementos de qualquer subcoleção finita de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$.

Espaço topológico é o par ordenado (X,$\mathcal{T}$), onde X é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma topologia.

Funções Contínuas

Sejam X e Y espaços topológicos. A função

$$f : X \longrightarrow Y$$

é dita **contínua** se para todo subconjunto aberto V de Y o conjunto $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto de X.

Homeomorfismo

Sejam X e Y espaços topológicos; seja $f : X \longrightarrow Y$ uma bijeção. Se ambas as funções f e a função inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ são contínuas, então a f é um **homeomorfismo**.

Topologia Quociente

Definição: Seja X e Y espaços topológicos; seja $p : X \longrightarrow Y$ uma relação sobrejetora. A relação p é dita **relação quociente** quando um subconjunto U de Y é aberto em Y e se, e somente se, $p^{-1}(U)$ é aberto em X.

Definição: Seja X um espaço topológico, A um conjunto e $p : X \longrightarrow A$ uma relação sobrejetora, então existe exatamente uma topologia $\mathcal{T}$ em A de modo que p seja uma relação quociente; chamaremos isso de **topologia quociente** induzida por p.

A topologia $\mathcal{T}$ é de fato definida como todos os subconjuntos U de A tal que $p^{-1}(U)$ é aberto em X. Vamos checar que $\mathcal{T}$ é uma topologia: O conjunto $\emptyset$ e o A são abertos porque $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $p^{-1}(A) = X$. As outras condições decorrem de:

i)

$$p^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in J} p^{-1}(U_\alpha)$$

ii)

$$p^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} p^{-1}(U_i)$$

Definição: Seja X um espaço topológico, e seja X^* uma partição de X formada por subconjuntos disjuntos, tal que a união é X. Seja $p : X \longrightarrow X^*$ uma relação sobrejetora onde leva todo ponto de X em um elemento de X^* que o contém. Na topologia quociente induzida por p, o espaço X^* é chamado de **espaço quociente** de X.

Seja p uma projeção. O conjunto C do domínio de p é **saturado** se para todo $p^{-1}(A)$ que intersecta C, $p^{-1}(A)$ está contido em C. Isto é equivalente à afirmar que $p^{-1}p(C) = C$.

Análise Topológica

Seja X um círculo unitário fechado

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

em $\mathbb{R}^2$, e seja X^* uma partição de X consistindo de todo conjunto unitário $\{(x, y)\}$ para todo $x^2 + y^2 < 1$, juntamente com o conjunto $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. As partes rachuradas na figura abaixo são típicos subconjuntos saturados de X^*. É simples ver que o conjunto X^* é homeomorfo ao subespaço de $\mathbb{R}^3$ chamado de esfera unitária, definida por

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

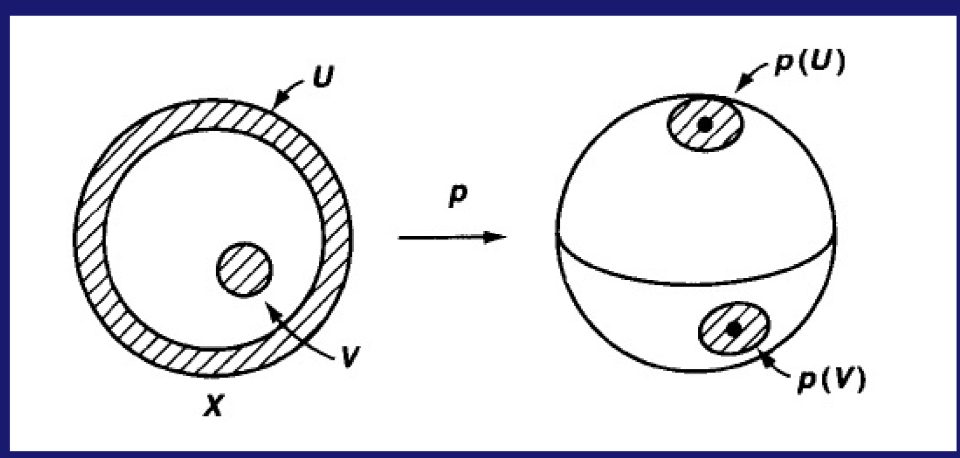

Figura 1: [2]

Mas ora, a partição X^* menos a S^1 é homeomorfo ao espaço topológico $\mathbb{R}^2$. A função $f : X^* - S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que dá esse homeomorfismo é

$$f(u) = \frac{u}{1 + ||u||}$$

onde u é um elemento de $X^* - S^1$.

E por sua vez, todo o espaço $\mathbb{R}^2$ é homeomorfo à esfera unitária, menos um ponto. Neste caso, a função $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 - \{p\}$, onde p é o pólo norte, dado por

$$g(w) = (v', v), \text{ onde } v' = \frac{2w}{|w|^2 + 1} \text{ e } v = \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1}, \forall w \in \mathbb{R}^2$$

A função que vai do disco aberto até a esfera unitária menos um ponto nada mais é que a composta de g com f, neste caso, a função $h : X^* - S^1 \longrightarrow S^2 - \{p\}$ definida como $h = g \circ f$. Restando somente S^1 sendo levada em p.

Referências

[1] Elon Lages. LIMA. *ELementos de Topologia Geral*. Editora SBM, 1st edition, 2009.

[2] J. R. MUNKRES. *Topology*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2nd edition, 2000.

Agradecimentos

Na condição de bolsista do PET Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, agradeço o PET-SESu-MEC.