Classificação dos grupos simples de ordem menor que 60

Alberto Divino de Oliveira Filho & Isabella Maciel Torres

Instituto Federal de Goiás-Câmpus Valparaíso

albertodof2010@hotmail.com | Bella.macieltorres@gmail.com

Resumo

Este Trabalho foi feito com a orientação da Prof.^{a} Dra. Lucimeire Alves de Carvalho.

Usando os Teoremas de Sylow e o Teorema de Lagrande, faremos a classificação dos grupos simples de ordem menor que 60.

Introdução

Seja G um grupo e $H < G$ se, $\forall g \in G$ tivermos $gHg^{-1} = H$, dizemos que H é normal em G, e usamos a notação $H \triangleleft G$. Os Grupos simples são aquela que só possuem subgrupos normais triviais, $\{e\}$ e o próprio G. Os Teoremas de Sylow nos permite em vários casos garantir a existência de subgrupos normais. Este trabalho consiste em, usando os Teoremas de Sylow e conceitos pertinentes à Álgebra, classificar os grupos simples de ordem menor que 60.

Objetivos

Ampliar a bibliografia conhecida dentro da área de Álgebra, estudar os conceitos de grupo, subgrupo e teoremas relacionados, aprofundar os conhecimentos estudados na disciplina de Álgebra, e por fim classificar grupos simples de ordem inferior a 60.

Teoremas de Sylow

1º Teorema de Sylow *Seja p um número primo e G um grupo de ordem $p^m b$ com $(p,b) = 1$. Então, para cada n, $0 \leq n \leq m$, existe um subgrupo H de G tal que $|H| = p^n$.*

2º Teorema de Sylow *Sejam G um grupo finito, p um número primo e n_p o número de p-Sylow subgrupos de G. Então:*

a) *Todos os p-Sylow subgrupos de G são conjugados entre si. Em particular, um p-Sylow subgrupo S de G é normal em G se, e somente se, S é o único p-Sylow subgrupo de G. Neste caso, S é um subgrupo característico de G.*

b) *Se P é um p-Sylow subgrupo de G, existe um p-Sylow subgrupo S de G tal que $P \subseteq S$.*

c) *Se S é um p-Sylow subgrupo, temos $n_p = (G : N_G(S))$.*

3º Teorema de Sylow *Sejam p um número primo e G um grupo finito de ordem $p^m b$, com $(p,b) = 1$. Seja n_p o número de p-Sylow subgrupos de G. Então:*

$$\begin{cases} n_p \text{ divide } b \\ n_p \equiv 1 \mod p \end{cases}$$

Resultados

Com os Teoremas de Sylow conseguimos classificar uma infinidade de grupos quanto a existência de subgrupos normais, que atendem a certas característica apresentadas nos Teoremas abaixo:

Teorema 1. *Sejam G grupo e p um número primo. Se $|G| = p$, então G é um grupo simples.*

Teorema 2. *Se G um grupo com $|G| = p^k$, com p primo e $k > 1$, então existe algum subgrupo de G normal não trivial.*

Teorema 3. *Seja G um grupo de ordem $2p^k$ com p primo e $k \in \mathbb{N}$, então existe um subrgrupo H com $|H| = p^k$ normal em G. Portanto G não é simples.*

Teorema 4. *Seja G um grupo com $|G| = pq$ onde p e q primos distintos e $p < q$, então existe um subgrupo H com $|H| = q$ normal em G. Portanto G não é simples.*

Teorema 5. *Se G é grupo com $|G| = pqr$ onde p, q e r primos distintos, então G não é grupo simples.*

Teorema 6. *Seja G um grupo com $|G| = p^n q$ onde p e q são primos distintos. Se $p^n < q$ então G possui um subgrupo H com $|H| = q$ normal em G, assim G não é um grupo simples.*

Os grupos das ordens 12,18,24,36,40,45,48 e 56 não atendem a nenhuma das características dos teoremas a cima , então sua classificação será feita a parte.

Grupos de ordem 12: Seja G um grupo com $|G| = 12 = 2^2 \cdot 3$. Pelo 3º Teorema de Sylow,temos que $n_2 \in \{1,3\}; n_3 \in \{1,4\}$. Se $n_3 = 1$ então existe um subgrupo K normal em G de ordem 3. Agora, se $n_3 = 4$, então teremos 4 subgrupos de ordem 3, sendo a única interseção entre eles e, ou seja, são necessários $4 \cdot 2$ elementos, sobrando exatamente 4 elementos. Pelo 1º Teorema de Sylow existe um subgrupo H com $|H| = 4$, então ele é único e necessariamente normal em G. Portanto grupos de ordem 12 não são simples.

Com este mesmo procedimento é possível concluir os grupos de ordem 56 também não são simples.

Grupos de ordem 18: Seja G um grupo com $|G| = 18 = 2 \cdot 3^2$. Pelo 3º Teorema de Sylow temos que $n_2 \in \{1,3,9\}; n_3 = 1$. Desta forma existe um subgrupo normal de ordem 3. Então grupos de ordem 18 não são simples.

Com este mesmo procedimento é possível concluir que os grupos de ordens 40 e 45 também não são simpes.

Grupos de ordem 24: Se G é um grupo e $|G| = 2^3 \cdot 3$, existe, pelo 1º Teorema de Sylow, um subgrupo H de ordem 2^3, ele é um "grande"subgrupo, pois $(G : H) = 3$ e temos $3! < 24$. Defina $T : G \longrightarrow P(\{aH | a \in G\})$. Note que $G/ker(T) \simeq T(G) < P(\{aH | a \in G\}) = S_3$. Assim $|G/ker(T)| = 1, 2, 3$ ou 6, em particular o $ker(T) \neq \{e\}$ e $ker(T) \subseteq H$. Assim $ker(T)$ é um subgrupo normal não trivial de G. Então grupos de ordem 24 não são simples.

Com este mesmo procedimento é possível concluir que os grupos de ordem 48 também não são simples.

Conclusão

Concluímos, então, que os únicos grupos simples,de ordem menor que 60, são aqueles cuja ordem é prima.

Referências

[1] GARCIA, ARNALDO; LEQUAIN, YVES , *Elementos de Álgebra. 5 ed* , Rio de Janeiro, RJ: Impa, 2008.

[2] HERNSTEIN, I. N. , *Tópicos de álgebra* , S. Paulo: Editôra da Univ. Polígono, 1985

[3] ROTMAN, JOSEPH J, *An Introduction to the theory of Groups. 4 ed* , Urbana, USA: Spinger, 1970

Agradecimentos

Agradeço especialmente a minha professora e orientadora Lucimeire Alves de Carvalho por todo o apoio, a dedicação e auxílio prestado neste trabalho. Agradeço ao IFG pelo apoio e também ao IMPA pela oportunidade.