32º Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, Rio de Janeiro, 28 de Julho a 02 de Agosto, 2019

Ciclos Principais Hiperbólicos de Variedades $n-$dimensionais Imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$

Gomes, Alacyr J.; Garcia, Ronaldo A.

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, Brasil

1 Introdução

Seja $\mathcal{M}^n$ de classe C^k, $k \geqslant 4$, uma variedade de dimensão n, compacta e orientada. Considere a imersão $\alpha : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ou seja, para cada $p \in \mathcal{M}^n$, a aplicação $D\alpha_p : T\mathcal{M}^n_p \to \mathbb{R}^{n+1}$ seja injetora. Sejam $\mathcal{J}^k = \mathcal{J}^k(\mathcal{M}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ o conjunto das imersões de classe C^k de $\mathcal{M}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, e $\mathcal{J}^{k,s}$ o subconjunto de $\mathcal{J}^k$ dotado da C^s-topologia de Whitney, $s \leqslant k$. Para cada $\alpha \in \mathcal{J}^k$ defina a aplicação normal $N_\alpha : \mathcal{M}^n \to S^n$, de classe C^{k-1}, tal que

$$N_\alpha = \frac{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n}{|\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n|},$$

onde $\wedge$ denota o produto exterior em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $(u_1, u_2, \dots u_n) : (\mathcal{M}^n, p) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ é uma carta positiva de $\mathcal{M}^n$ na vizinhança de p. O endomorfismo $\omega_\alpha : T\mathcal{M}^n \to T\mathcal{M}^n$ dado por $D\alpha \circ \omega_\alpha = DN_\alpha$ é auto-adjunto, quando $T\mathcal{M}^n$ é munido da métrica $\langle\ ,\ \rangle_\alpha$ induzida por α na métrica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Os valores opostos dos auto-valores de ω_α são chamados de curvaturas principais da imersão α e denotados por $k_1 \leqslant k_2 \ldots \leqslant k_n$. Os auto-espaços associados as essas curvaturas principais definem n campos de linhas de classe C^{k-2} dois a dois ortogonais em $T\mathcal{M}^n$, denotados por $\mathcal{L}_i(\alpha)$ e denominados de campos de linhas principais de α, Esses campos são caracterizados pelas equações de Rodrigues [10], [9]

$$\mathcal{L}_i(\alpha) = \{v \in T\mathcal{M}^n : \omega_\alpha v + k_i v = 0\},\ i = 1, 2, 3 \ldots n. \quad (1)$$

O conjunto singular de $\mathcal{L}_i(\alpha)$ é o conjunto $\mathcal{S}_i = \{p \in \mathcal{M}^n : k_i(p)$ não é um autovalor de $\omega_\alpha\}$, as curvas integrais de $\mathcal{L}_i(\alpha) - \mathcal{S}_i$ são denominadas de ***linhas de curvaturas principais***. As folheações integrais de $\mathcal{L}_i(\alpha)$ serão denotadas por $\mathcal{F}_i(\alpha)$ e denominadas de ***folheações principais de*** α e as folhas compactas serão denominadas de ***ciclos de curvaturas principais***. No caso de uma imersão de uma variedade $\mathcal{M}^2$ de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$, Sotomayor e Gutierez em [8] e [4] estudaram as configurações principais genéricas próximas dos pontos umbílicos e os ciclos principais hiperbólicos e bifurcações em [3], Garcia e Sotomayor em [7] estudaram as linhas de curvaturas próximas de ciclos principais. O caso de uma imersão de uma variedade $\mathcal{M}^3$ de dimensão 3 em $\mathbb{R}^4$, Garcia estudou as linhas principais próximas das singularidades denominadas parcialmente umbílicas, singularidades onde duas direções principais coincidem, e Garcia em [2] estudou a hiperbolicidade dos ciclos principais de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$.

2 Sistema de coordenadas

Seja γ um ciclo principal da folheação $\mathcal{F}_i(\alpha)$, com $\alpha \in \mathcal{J}^{\infty,r}$, considere na carta $(u_1, u_2, \ldots u_n)$, u_1 como parâmetro comprimento de arco de γ, isto é $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{M}^n$ é uma parametrização de γ, com $\gamma(u_1 + L) = \gamma(u_1)$, sendo L o comprimento de γ.

Considere o referencial ortonormal

$$\{e_1(u_1), e_2(u_1), \ldots, e_n(u_1), N_\alpha(u_1)\}$$

ao longo de γ sendo $e_i(u_1)$ os vetores unitários tangentes as linhas de curvaturas principais correspondentes as folheações $\mathcal{F}_i(\alpha)$, com $e_1(u_1) = D\alpha\big(\gamma(u_1)\big) \cdot \gamma'(u_1)$ e $N_\alpha(u_1) = \big(e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n\big)(u_1)$ sendo o vetor normal a α no ponto $\gamma(u_1) \equiv \alpha\big(\gamma(u_1)\big)$.

$$\alpha(u_1, \ldots, u_n) = (\alpha \circ \gamma)(u_1) + \sum_{i=2}^{n} u_i \cdot e_i(u_1) + \left[\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} k_i(u_1) u_i^2 + A(u_1, \ldots, u_n)\right] \cdot N_\alpha(u_1), \quad (2)$$

onde

$$\begin{aligned} A(u_1, \ldots, u_n) = {} & \frac{u_2^2}{2} \cdot \left(\sum_{i=2}^{n} \beta_{2i}(u_1) u_i\right) + \frac{u_3^2}{2} \cdot \left(\sum_{i=2}^{n} \beta_{3i}(u_1) u_i\right) \\ & + \cdots + \frac{u_n^2}{2} \cdot \left(\sum_{i=2}^{n} \beta_{ni}(u_1) u_i\right) \\ & + O[(u_2^2 + \ldots + u_n^2)^2]. \end{aligned} \quad (3)$$

e $A(u_1, 0, \ldots, 0) = 0$. No desenvolvimento em Taylor da função $A(u_1, \ldots, u_n)$ em torno do ponto $(u_1, 0, \ldots, 0)$, temos que os coeficientes $\beta_{ji}(u_1) = \dfrac{\partial k_j}{\partial u_i}(u_1, 0, \ldots, 0)$, se $j \neq i$ e $\beta_{ji}(u_1) = \frac{1}{3} \cdot \dfrac{\partial k_j}{\partial u_i}(u_1, 0, \ldots, 0)$, se $j = i$.

Com respeito ao referencial ortonormal positivo $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, N\}$, as equações de Darboux para a curva $\alpha \circ \gamma$ são dadas pelo sistema

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \\ \vdots \\ e_{n-1}' \\ e_n' \\ N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & \cdots & \omega_{1n-1} & \omega_{1n} & k_1 \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \cdots & \omega_{2n-1} & \omega_{2n} & 0 \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 & \cdots & \omega_{3n-1} & \omega_{3n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\omega_{1n-1} & -\omega_{2n-1} & -\omega_{3n-1} & \cdots & 0 & \omega_{n-1n} & 0 \\ -\omega_{1n} & -\omega_{2n} & -\omega_{3n} & \cdots & -\omega_{n-1n} & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \\ N \end{pmatrix}, \quad (4)$$

onde $\omega_{ij} = \langle \bigtriangledown_{e_1} e_i, e_j \rangle$. ver [9].

No sistema de coordenadas $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, seja a transformação de Poincaré $\Pi : \{u_1 = 0\} \to \{u_1 = L\}$, onde $\{u_1 = 0\}$ e $\{u_1 = L\}$ são seções transversais. Suponha que $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ seja solução da equação diferencial implícita que define o campo de linha $\mathcal{L}_1(\alpha)$, com condição inicial $(u_1, u_2, \ldots, u_n)(0, u_2^0, \ldots, u_n^0) = (0, u_2^0, \ldots, u_n^0)$, então a transformação de Poincaré é definida por

$$\begin{aligned} \Pi(u_2^0, \ldots, u_n^0) = \big(& u_2(L, u_2^0, \ldots, u_n^0),\ u_3(L, u_2^0, \ldots, u_n^0), \\ & \ldots,\ u_n(L, u_2^0, \ldots, u_n^0)\big). \end{aligned} \quad (5)$$

Teorema 1. *Com as condições acima temos que a derivada da transformação de Poincaré é* $\Pi'(0) = U(L)$, *onde* U *é solução do problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} U' = A \cdot U \\ U(0) = I, \quad U(u_1) = U(u_1 + L) \end{cases}, \quad (6)$$

com

$$A(u_1) = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_2'}{(k_2 - k_1)} & \dfrac{w_{23}(k_3 - k_1)}{(k_2 - k_1)} & \dfrac{w_{24}(k_4 - k_1)}{(k_2 - k_1)} & \cdots & \dfrac{w_{2n}(k_n - k_1)}{(k_2 - k_1)} \\ -\dfrac{w_{23}(k_2 - k_1)}{(k_3 - k_1)} & -\dfrac{k_3'}{(k_3 - k_1)} & \dfrac{w_{34}(k_4 - k_1)}{(k_3 - k_1)} & \cdots & \dfrac{w_{3n}(k_n - k_1)}{(k_3 - k_1)} \\ -\dfrac{w_{24}(k_2 - k_1)}{(k_4 - k_1)} & -\dfrac{w_{34}(k_3 - k_1)}{(k_4 - k_1)} & -\dfrac{k_4'}{(k_4 - k_1)} & \cdots & \dfrac{w_{4n}(k_n - k_1)}{(k_4 - k_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{w_{2n}(k_2 - k_1)}{(k_n - k_1)} & -\dfrac{w_{3n}(k_3 - k_1)}{(k_n - k_1)} & -\dfrac{w_{4n}(k_4 - k_1)}{(k_n - k_1)} & \cdots & -\dfrac{k_n'}{(k_n - k_1)} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

3 Controle

Aqui iremos apresentar o conceito de controle geométrico que podem ser encontrado em Coron [1] e [5].

Considere um sistema de controle de equações diferenciais lineares homogêneo em $M_n(\mathbb{R})$ (matrizes de ordem $n \geqslant 1$, com entradas reais) da forma

$$\dot{X}(s) = A(s)X(s) + \sum_{i=1}^{k} v_i(s) B_i(s) X(s), \quad k \geqslant 1, \quad (8)$$

com $X(s)$ em $M_n(\mathbb{R})$, os controles $v_i(s)$ in $L^1([0, L] : \mathbb{R}^k)$, $k \geqslant 1$ e $s \in [0, L]$, $L > 0$, $A(s)$, $B_i(s)$ aplicações suaves em $M_n(\mathbb{R})$, com $i = 1, 2, \cdots, k$, e o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{X}(s) &= A(s)X(s) + \sum_{i=1}^{k} v_i(s) B_i(s) X(s), \quad k \geqslant 1, \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Definição 1. *O sistema de controle (8) e completamente controlável ou controlável se, para cada* $(X_0, X_1) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$, *existe um controle* $v(s) = (v_1(s), \ldots, v_k(s))$ *em* $L^\infty((0, L) : \mathbb{R}^k)$, *tal que a solução* $X \in C^0([0, L], M_n(\mathbb{R}))$ *do problema de Cauchy (9) satisfaz* $X(L) = X_1$.

O teorema a seguir, nos garante uma condição suficiente para a controlabilidade de (8), e se encontra em Rifford and Ruggiero [6].

Teorema 2. *Sejam* $L > 0$, *e as aplicações suaves* $s \in [0, L] \to A(s)$, $B_1(s) \ldots B_k(s) \in M_n(\mathbb{R})$. *Defina* k *sequencias de aplicações* $\{B_1^j\}, \ldots \{B_k^j\} : [0, L] \to T_{I_n} M_n(\mathbb{R})$, *por*

$$\begin{aligned} B_i^0(s) &:= B_i(s), \\ &\vdots \\ B_i^j(s) &:= \frac{d}{ds} B_i^{j-1}(s) - [B_i^{j-1}(s), A(s)], \end{aligned} \quad (10)$$

para todo $s \in [0, L]$ *e cada* $i \in \{1, \ldots k\}$. *Se existe um* $\overline{s} \in [0, L]$, *tal que*

$$\mathrm{Span}\{B_i^j(\overline{s}) \mid i \in \{1, \ldots k\}, j \in \mathbb{N}\} = T_{I_n} M_n(\mathbb{R}). \quad (11)$$

Então, o sistema de controle (8) é controlável $[0, L]$.

4 Hiperbolicidade

Dizemos que um ciclo principal da folheação $\mathcal{F}_i(\alpha)$ é hiperbólico se a derivada da transformação de Poincaré associada é um isomorfismo hiperbólico.

Teorema 3. *Sejam* $\alpha : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *uma imersão e* γ *um ciclo principal de comprimento* L *da folheação* $\mathcal{F}_i(\alpha)$. *Dados* $\varepsilon > 0$ *e* $r \in \mathbb{N}$, *existe uma imersão* α_ε *em* $\mathcal{J}^k(\mathcal{M}^n, \mathbb{R}^{n+1})$, *tal que* $\|\alpha - \alpha_\varepsilon\|_r < \varepsilon$, *sendo* γ *um ciclo principal hiperbólico de* $\mathcal{F}_i(\alpha_\varepsilon)$.

Demonstração. Considere a perturbação da imersão α dada por

$$\begin{aligned} \alpha_\varepsilon(u_1, u_2, \ldots, u_n) = {} & \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ & + \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{i=2}^{n} \phi_i(u_1) \cdot u_i^2\right) \cdot N(u_1), \end{aligned} \quad (12)$$

com $\phi_i(u_1)$, $i \in \{2, \ldots, n\}$ de suporte compacto, que teremos o sistema de controle

$$\dot{U}(u_1) = A(u_1)U(u_1) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} v_{lm}(u_1) B_{lm}(u_1) U(u_1), \quad (13)$$

com $B_{lm}(u_1) = E_{lm}$, com o elemento da $l-$ésima linha e $m-$ésima coluna igual a 1 e os demais elementos nulos, e os controles

$$v_{lm}(u_1) = \begin{cases} \dfrac{\phi_{l+1}'(k_{l+1} - k_1) + k_{l+1}' \cdot \phi_{l+1}}{(k_{l+1} - k_1)^2}(u_1) \cdot \varepsilon, & l = m \\[2ex] \dfrac{\omega_{l+1,m+1}\Big[(k_{l+1} - k_1) \cdot \phi_{m+1} - (k_{m+1} - k_1) \cdot \phi_{l+1}\Big]}{(k_{l+1} - k_1)^2}(u_1) \cdot \varepsilon, & l < m \\[2ex] \dfrac{\omega_{m+1,l+1}\Big[(k_{m+1} - k_1) \cdot \phi_{l+1} - (k_{l+1} - k_1) \cdot \phi_{m+1}\Big]}{(k_{l+1} - k_1)^2}(u_1) \cdot \varepsilon, & l > m. \end{cases}$$

Agora basta usar o Teorema 2 de controle.

Referências

[1] J.-M. Coron. *Control and nonlinearity*, volume 136 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[2] R. A. Garcia. Hyperbolic principal cycles on hypersurfaces of $\mathbf{R}^4$. *Ann. Global Anal. Geom.*, 11(2):185–196, 1993.

[3] C. Gutierrez and J. Sotomayor. Closed principal lines and bifurcation. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 17(1):1–19, 1986.

[4] C. Gutierrez and J. Sotomayor. *Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces.* 18^{th} Brasilian Math. Colloquium. IMPA, 1991.

[5] L. Rifford. *Sub-Riemannian geometry and optimal transport*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Cham, 2014.

[6] L. Rifford and R. O. Ruggiero. Generic properties of closed orbits of Hamiltonian flows from Mañé's viewpoint. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (22):5246–5265, 2012.

[7] J. Sotomayor and R. A. Garcia. Lines of curvature near principal cycles. *Ann. Global Anal. Geom.*, 10(3):275–289, 1992.

[8] J. Sotomayor and C. Gutierrez. Structurally stable configurations of lines of principal curvature. In *Bifurcation, ergodic theory and applications (Dijon, 1981)*, volume 98 of *Astérisque*, pages 195–215. Soc. Math. France, Paris, 1982.

[9] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. IV*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[10] D. J. Struik. *Lectures on classical differential geometry*. Dover Publications, Inc., New York, second edition, 1988.