Plane sections of Fermat surfaces over finite fields

Mariana Coutinho[1], Herivelto Borges[2], Gary Cook[3]

[1] Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas
[2] Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo
[3] Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo

In this work, we characterize all curves over $\mathbb{F}_q$ arising from a plane section

$$\mathcal{P} : X_3 - e_0X_0 - e_1X_1 - e_2X_2 = 0$$

of the Fermat surface

$$\mathcal{S} : X_0^d + X_1^d + X_2^d + X_3^d = 0,$$

where $q = p^m = 2d + 1$ is a prime power, $p > 3$, and $e_0, e_1, e_2 \in \mathbb{F}_q$. In particular, we prove that any nonlinear component $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ is a smooth classical curve of degree $n \leqslant d$ attaining the Stöhr-Voloch bound

$$\#\mathcal{F}(\mathbb{F}_q) \leqslant \frac{1}{2}n(n + q - 1) - \frac{1}{2}i(n - 2),$$

with $i \in \{0, 1, 2, 3, n, 3n\}$.