unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

XXV SEMAT

Jogos Combinatórios e Números Surreais

Ralph Costa Teixeira

Departamento de Matemática Aplicada - UFF

IBILCE - UNESP - Departamento de Matemática
São José do Rio Preto
Outubro de 2013

Capítulo 1

O que são Jogos Combinatórios?

Na nossa análise, consideraremos um *jogo* como:

1. Um conjunto de *posições*, uma das quais é destacada como a *posição inicial* do jogo;
2. Um conjunto de *jogadores* que realizarão os lances (vide a seguir) do jogo;
3. Um conjunto de *regras*, que determinam:
   (a) Todos os *lances* permitidos aos jogadores (um lance é um movimento de uma posição do jogo para outra);
   (b) Todas as *posições terminais* (nas quais o jogo termina, dependendo de quem joga a seguir);
   (c) Uma quantidade de *pontos* a ser atribuída a cada jogador em cada posição terminal (que, na maioria dos casos será 1 ponto para os vencedores e 0 pontos para os perdedores)

Um *jogo combinatório* é um **jogo sequencial com informação completa**, isto é, jogos onde os jogadores jogam alternadamente e sabem tudo sobre a posição corrente do jogo e os possíveis lances a cada momento. Em particular, "informação completa"significa que o elemento de sorte/azar/probabilidade não pode estar presente no jogo, nem pode haver "cartas escondidas"ou algo do gênero.

Por exemplo, *Jogo da Velha*, *Xadrez*, *Damas* e *Go* são jogos combinatórios (quando há empate, pressuponha meio ponto para cada jogador); mas *Gamão*, *Ludo* e quaisquer jogos com dados não são (pois não há informação completa devido à aleatoriedade dos dados). Praticamente qualquer jogo de baralho (*Buraco*, *Canastra*, *Pôquer*, *Truco*, etc.) não é um jogo combinatório (o fato de você não saber as cartas dos outros jogadores exclui "informação completa"; aliás, o simples fato das cartas serem embaralhadas de maneira desconhecida já faz com que o jogo não seja combinatório). *Par ou Ímpar*, *Dois ou Um (Zerinho ou Um)*, *Dedanha* também não são jogos combinatórios porque os jogadores jogam simultaneamente. Esportes como *Futebol*, *Vôlei*, etc. não tem regras bem definidas (um dos problemas é que os lances permitidos dependem da habilidade dos jogadores) e também não são jogos combinatórios.

Note-se que o número de jogadores pode ser 1 (como nas clássicas *Paciências*, que tipicamente não são jogos combinatórios, ou no *Resta-Um*, que é um jogo combinatório) ou até mesmo 0 (como no fascinante e riquíssimo *Life*, de John Conway, onde todos os movimentos são pré-determinados, não há escolha nem fim). Isto dito, neste texto nos limitaremos a jogos de 2 jogadores, que serão chamados daqui por diante de L (de Leitor, azuL, Left, você) e R (Ralph, veRmelho, Right, eu). Não se surpreenda portanto se a maioria dos exemplos favorecer o jogador R.

É comum também considerar apenas jogos em que o número de posições é finito – mas boa parte da teoria que discutiremos se aplicam a jogos infinitos, desde que o jogo garantidamente termine em um número finito de lances[1].

Enfim, trabalharemos apenas com jogos que têm a *Regra Normal*: se a partir de uma posição o jogador prestes a realizar seu lance descobrir que ele não tem lances válidos, então esta posição é terminal e este jogador será imediatamente declarado *perdedor*. Note que isto não é uma restrição forte – por exemplo, se declararmos que, no Xadrez, o jogador que sofreu Xeque-Mate não tem lances válidos, esta condição é automaticamente satisfeita. Ajustes semelhantes podem ser feitos no seu jogo combinatório favorito para que ele tenha tal *Regra Normal* ("quem não pode jogar, perde").

Exemplo 1.1 *Jogo dos 15*

Selecione de um baralho 9 cartas numeradas de 1 a 9 e coloque-as sobre a mesa (viradas para cima – informação completa!). Em cada turno, o jogador da vez traz uma carta para a sua mão. Assim que você tiver em sua mão um subconjunto de exatamente **três** cartas cuja soma seja 15, você vence. Se as cartas acabarem e ninguém tiver vencido, o jogo empata.

Exemplo 1.2 *Chopsticks*

Cada jogador mostra suas mãos ao outro jogador, inicialmente com um dedo estendido em cada mão (representando um "ponto"em cada mão). O objetivo do jogo é "matar"ambas as mãos do oponente (uma mão com 5 ou mais pontos é sempre imediatamente trocada por uma com 0 pontos, isto é, com todos os dedos fechados, e é considerada "morta"). Para tanto, a cada turno um jogador deve realizar apenas um dos seguintes movimentos:

i) Tocar uma das mãos do oponente com uma de suas mãos; neste caso, os pontos da mão que tocou são adicionados aos pontos da mão tocada (a mão que tocou mantém seus pontos);

ii) Tocar suas mãos entre si, transferindo pontos entre elas; com este movimento, um jogador pode até mesmo "ressuscitar"uma mão morta. Note-se que este movimento só é permitido se os números de pontos de suas mãos realmente mudar – o jogador não pode trocar 1+2 por 2+1, por exemplo.

Exemplo 1.3 *Nim Simples*

Numa mesa há 5 pilhas de palitos, com, respectivamente, 1, 2, 3, 4 e 5 palitos. Em cada turno, o jogador da vez escolhe uma das pilhas, e retira quantos palitos desejar daquela pilha (só não vale retirar 0 palitos, que seria "passar a vez"). Quem tirar o último palito **ganha**.

[1]Não confunda "infinitas opções"com "jogo interminável". Por exemplo, considere o jogo em que L escolhe um número real, e em seguida R escolhe um número real – quem escolher o maior número ganha; há uma infinidade de escolhas para L e R, mas o jogo garantidamente termina em apenas 2 lances.

Exemplo 1.4 *Nim (Generalizado)*

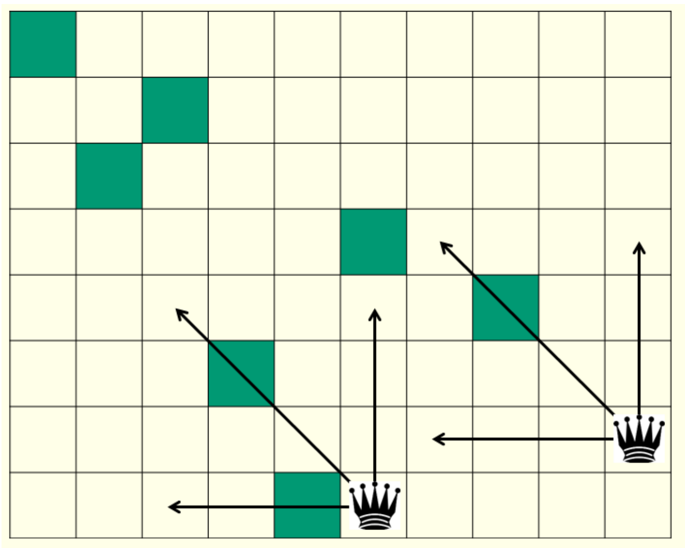
Numa mesa, há n pilhas de palitos, com, respectivamente, x_1, x_2, ..., x_n palitos. As regras são idênticas às do exemplo anterior. E agora?

Exemplo 1.5 *Wyt´s Queen*

Posicione uma dama em uma das casas de um tabuleiro de xadrez. Em cada turno, o jogador da vez a move quantas casas quiser em uma das seguintes direções: Norte, Oeste ou Noroeste. Quem levar a dama ao canto Noroeste vence.

Exemplo 1.6 *Wyt´s Queens*

Num tabuleiro $n \times n$, posicione um número m de damas. Em cada turno, o jogador da vez escolhe uma das damas e a move como no jogo anterior. As damas não interferem umas com as outras, isto é, uma dama pode passar por cima de outra em seu movimento, e várias damas podem ocupar a mesma casa em qualquer momento do jogo. Quem não tiver movimento válido (o que ocorre quando todas as damas estiverem no canto Noroeste) perde.



1.1 Árvores e Estratégias Vencedoras

O leitor pode ficar com a impressão de que Jogos Combinatórios não têm graça. Afinal, como a informação é completa, é teoricamente possível analisar a árvore **completa** do jogo (onde cada nó é uma posição e cada ramo é um lance). De fato, supondo que os jogadores sempre jogam da melhor maneira possível, podemos usar o seguinte raciocínio:

1. Se o jogo está numa posição em que L escolhe como continuar, e ele tem pelo menos uma opção que lhe garante a vitória, então L inteligentemente a escolherá, e vencerá o jogo. Portanto, esta posição é vencedora para L. Indicaremos isto com a frase "esta posição é azuL".

2. Caso contrário, L procurará um lance que lhe garanta o empate; se tal lance existir, esta posição é "empatadora", e diremos que "esta posição é cinza".

3. Enfim, se L se encontra numa posição onde TODOS os lances levam a vitórias para R, então esta posição é vencedora para R, isto é, veRmelha.

4. Quando é a vez de R jogar, a análise é a mesma das 3 linhas anteriores, trocando L por R.

Assim, **se o jogo é finito**, podemos utilizar um algoritmo simples de coloração da árvore (que nada mais é que a repetição do raciocínio acima):

1. Nos nós terminais, use a cor do jogador vencedor, ou cinza se o resultado é o empate.

2. Agora trabalhe "de trás para a frente": para cada nó cujas folhas estejam todas coloridas:

   (a) Se a vez é de L...

      i. ...e há alguma folha azuL, use neste nó a cor azuL; senão
      ii. ...se há alguma folha cinza, use neste nó a cor cinza; senão
      iii. ...(todas as folhas são veRmelhas) use neste nó veRmelho.

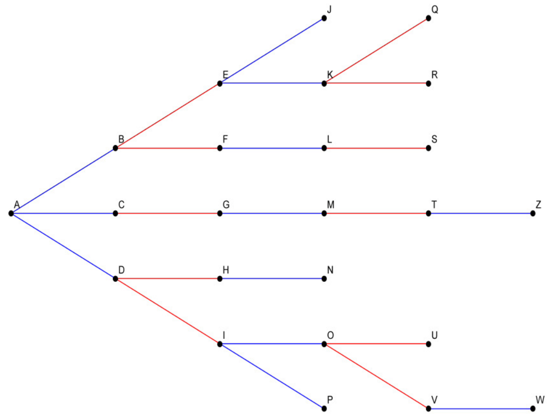
   (b) Se a vez é de R...

      i. ...e há alguma folha veRmelha, use neste nó a cor veRmelha; senão
      ii. ...se há alguma folha cinza, use neste nó a cor cinza; senão
      iii. ...(todas as folhas são azuis) use neste nó azuL.

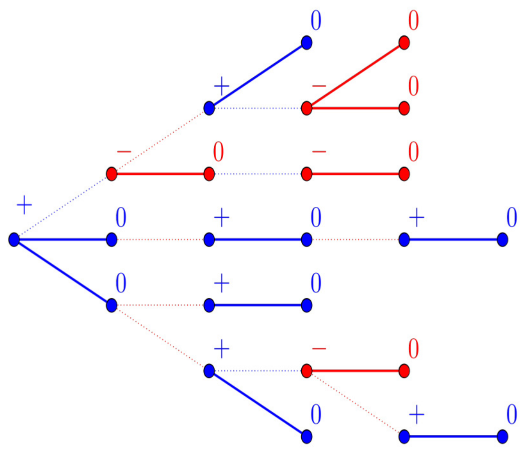
3. Repita o passo 2 até chegar ao nó inicial! Sua cor determina quem vence o jogo (ou se ele terminará empatado).

Aliás, se a cada passo você destacar os lances que levam à vitória, então não só sabemos quem vencerá mas também saberemos todas as maneiras ótimas de jogar aquele jogo!

Exemplo 1.7 *No jogo descrito pela árvore abaixo, arestas azuis são movimentos possíveis para você (L), e arestas vermelhas são possíveis para mim (R). Quem não tem movimento válido perde (não há empates). Você começa o jogo, em A. Quem vai vencer? Como?*



Seguindo o algoritmo (da direita para a esquerda), resolvemos o jogo. Arestas cheias são lances que levam à vitória para o jogador indicado, e arestas tracejadas são lances perdedores. Nós "positivos"são nós onde você tem um lance vencedor (2.a.i); nós "negativos"são nós onde eu tenho um lance vencedor (2.b.i). Em nós marcados com "0", quem joga perde (2.a.iii ou 2.b.iii). Quem ganha este jogo é você (L), e há duas boas jogadas iniciais – para "Leste"ou "Sudeste". Não comece para cima, pois aí eu tomo controle do jogo (jogando para a direita e trilhando nós vermelhos).



Em suma, demonstramos que, num jogo combinatório **finito**, uma das seguintes opções tem que valer:

1. O primeiro jogador tem uma estratégia que lhe garante a vitória; ou
2. O segundo jogador tem uma estratégia que lhe garante a vitória; ou
3. Ambos os jogadores têm estratégias que lhes garantem o empate.

Em teoria, o algoritmo acima resolve qualquer jogo combinatório, inclusive Damas, Xadrez e Go. Na prática, as árvores de tais jogos sofrem da famigerada "explosão combinatória", e não há recursos computacionais na atualidade que sejam capazes de completar esta tarefa de maneira tão ingênua. Experimente um exemplo simples: a árvore do Jogo da Velha tem muito mais do que $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15\,120$ nós... Mesmo usando as simetrias do jogo, a árvore ainda deve ocupar umas duas páginas (vide p. 735 de [1]).

A título de ilustração, a tirinha[2] a seguir, extraída em Janeiro de 2012 do fantástico site www.xkcd.com, exibe o estado da arte das Inteligências Artificias frente a alguns jogos conhecidos. Note que o jogo de Damas, a partir da posição inicial usual, está resolvido (empata se ambos os jogadores jogarem da melhor maneira possível); em Xadrez acredita-se que o resultado é empate, mas ainda não há resposta definitiva.

Em suma, só porque há um algoritmo que resolve Jogos Combinatórios, não significa que o assunto acabou[3]. O objetivo deste minicurso é investigar novas ferramentas de análise para Jogos Combinatórios.

1.2 Solução de Jogos Selecionados

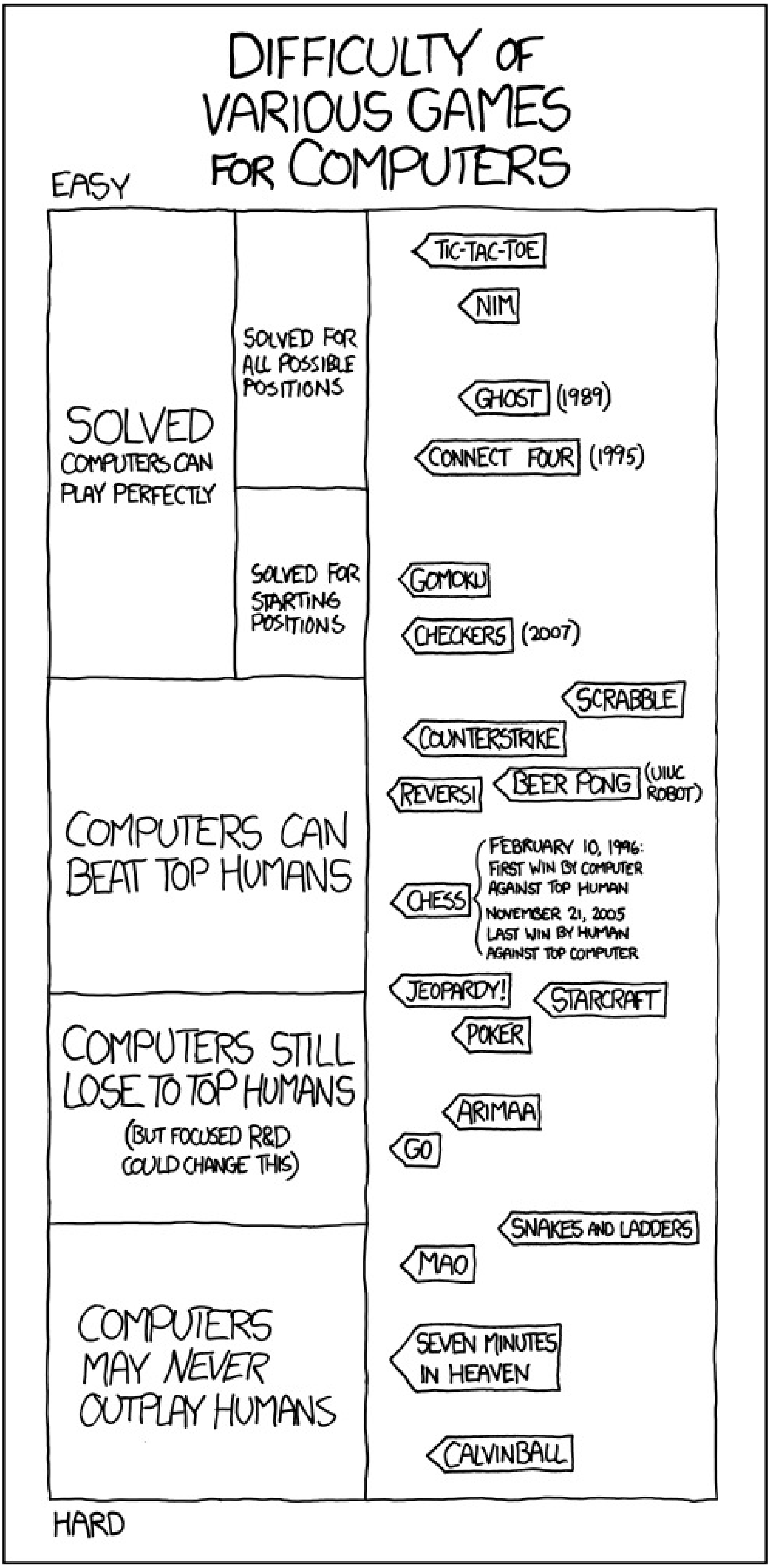
Exemplo 1.8 *O Jogo dos 15 empata. Aliás, o quadrado mágico abaixo mostra que o jogo dos 15 é o Jogo da Velha muito mal disfarçado.*

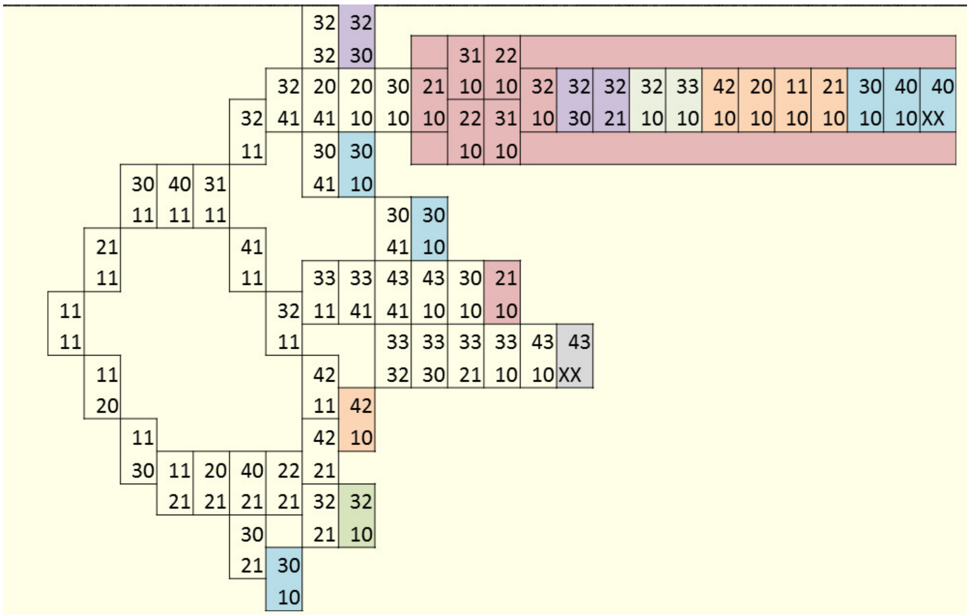
$$\begin{matrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{matrix}$$

Exemplo 1.9 *O segundo jogador vence Chopsticks. Na árvore abaixo, cada retângulo é uma posição do jogo Chopsticks (dois números para cada jogador). Por exemplo, no primeiro lance o primeiro jogador pode trocar a mão do oponente de $(1,1)$ para $(2,1)$ ou trocar a sua própria mão de $(1,1)$ para $(2,0)$. Esta não é a árvore completa do jogo – ela contém apenas uma estratégia vencedora para o segundo jogador; algumas opções claramente perdedoras para o primeiro jogador nem estão descritas. Fica ao leitor decifrar a notação utilizada (as cores conectam retângulos distantes).*

[2] http://xkcd.com/1002/.

[3] Só porque você aprendeu a contar, não significa que não precisa aprender a somar ou multiplicar...


DIFFICULTY OF VARIOUS GAMES FOR COMPUTERS
EASY
SOLVED
COMPUTERS CAN PLAY PERFECTLY
SOLVED FOR ALL POSSIBLE POSITIONS
SOLVED FOR STARTING POSITIONS
COMPUTERS CAN BEAT TOP HUMANS
COMPUTERS STILL LOSE TO TOP HUMANS
(BUT FOCUSED R&D COULD CHANGE THIS)
COMPUTERS MAY NEVER OUTPLAY HUMANS
HARD
TIC-TAC-TOE
NIM
GHOST (1989)
CONNECT FOUR (1995)
GOMOKU
CHECKERS (2007)
SCRABBLE
COUNTERSTRIKE
REVERSI
BEER PONG (UIUC ROBOT)
CHESS
FEBRUARY 10, 1996: FIRST WIN BY COMPUTER AGAINST TOP HUMAN
NOVEMBER 21, 2005 LAST WIN BY HUMAN AGAINST TOP COMPUTER
JEOPARDY!
STARCRAFT
POKER
ARIMAA
GO
SNAKES AND LADDERS
MAO
SEVEN MINUTES IN HEAVEN
CALVINBALL



Exemplo 1.10 *O primeiro jogador vence Nim Simples. Uma maneira de vencer é retirar um palito da última pilha (deixando* $(1,2,3,4,4)$*). A partir daí, você pode garantir a vitória da seguinte forma:*
– Nas três primeiras pilhas, sempre deixe $(1,2,3)$ *ou uma pilha vazia e duas iguais;*
– Nas duas últimas pilhas, sempre deixe dois números iguais.

Exemplo 1.11 *Para resolver Wyt´s Queen, sempre leve a dama a uma das casas marcadas em verde no tabuleiro acima. Se for a sua vez de jogar e a dama estiver numa casa verde, você vai perder.*

O Nim generalizado e o Wyt´s Queens serão resolvidos ao final deste texto.