



Impa Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

---

# Geração de Cenários de Estresse para a Curva de Juros Brasileira

Autor: Romeu Dellazeri Pixiolini

Orientador: Ariel Levy

Rio de Janeiro  
Janeiro de 2014



Para minha família.



## **Agradecimentos**

Agradeço a todos que me ajudaram e contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Faço menção especial aos professores Ariel Levy, Jorge P. Zubelli e Luca Phillippe Mertens e aos amigos do IMPA. Gostaria também de agradecer ao Alan de Genaro Dario por disponibilizar a base de dados para o desenvolvimento do projeto. Aos colegas e ex-colegas de trabalho do Modal Asset Management obrigado.



## Resumo

Com o objetivo de gerar cenários de estresse para a curva de juros brasileira, este trabalho foca na implementação do modelo de Heath, Jarrow e Morton (1992). De forma a complementar o estudo feito por [Dario and Fernández(2011)], a redução da dimensão do problema realizada através da análise de componentes principais mantém a ordem de explicação da variância em níveis altos, acima de 98% mesmo em momentos de grandes oscilações no mercado de juros brasileiro, uma vez que, na análise de componentes principais se adote os vértices da estrutura a termo da taxa de juros mais negociados. A união entre a informação de um profissional de risco de mercado e a robustez do modelo permite encontrar resultados satisfatórios na geração dos cenários de estresse. A estrutura de volatilidade foi construída de forma paramétrica baseada em vértices sintéticos que foram obtidos por interpolação dos dados históricos de cotações do DI Futuro negociado na BM&FBOVESPA, sendo o período analisado entre 02/01/2003 a 28/06/2013. A metodologia é aplicada no auge da crise imobiliária americana e em momentos de mudanças inesperadas na condução da política monetária.

**Palavras-chave:** Teste de Estresse; Heath-Jarrow-Morton; Estrutura a Termo da Taxa de Juros.

## Abstract

In order to generate stress scenarios for the Brazilian yield curve this work focuses on the implementation of Heath, Jarrow and Morton (1992 ) model. To complement the study by [Dario and Fernández(2011)], reducing the dimension of the problem performed by principal component analysis maintains the order of explained variance at high levels above 98% even in times of great variations in the Brazilian interest market, since in principal component analysis adopt the vertices of the term structure of interest rate most traded. The union between professional market risk information and the robustness of the model allows to find satisfactory results in the generation of stress scenarios. The volatility structure was built in parametric form based on synthetic vertices that were obtained by interpolation of the historical data of quotations DI Future traded at BM&FBOVESPA, being the analysis period between 01/02/2003 to 06/28/2013 . The methodology is applied at the peak of the U.S. housing crisis and in times of unexpected changes in monetary policy.

**Key words:** Stress test; Heath-Jarrow-Morton; Term structure of the interest rate.





# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Metodologias para o Teste de Estresse . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Estrutura a Termo das Taxas de Juros</b>	<b>5</b>
2.1	DI Futuro . . . . .	5
2.2	Invariantes de Mercado . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Análise de Componentes Principais - ACP</b>	<b>9</b>
3.1	ACP e a ETTJ . . . . .	11
3.2	Aplicação da ACP na ETTJ . . . . .	14
<b>4</b>	<b>O Modelo de Health-Jarrow-Morton</b>	<b>17</b>
4.1	Taxas <i>forward</i> . . . . .	17
4.2	A dinâmica das taxas <i>forward</i> e o preço dos títulos . . . . .	18
4.3	Mercado Livre de Arbitragem . . . . .	19
4.4	Generalização do HJM para a dinâmica das taxas <i>forward</i> . . . . .	21
4.5	Construção dos Cenários . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Implementação no Mercado Brasileiro</b>	<b>25</b>
5.1	Calibração do Modelo . . . . .	25
5.1.1	A escolha dos Vértices . . . . .	25
5.1.2	Análise de Componentes Principais . . . . .	26
5.1.3	Estimação da Volatilidade Paramétrica . . . . .	26
5.2	Aplicação do Modelo . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>33</b>
<b>A</b>	<b>Resultados Técnicos e Notações</b>	<b>34</b>
A.1	Considerações para a construção dos cenários . . . . .	34
A.2	Determinação do nível de confiança do choque . . . . .	34
A.3	Script Geral . . . . .	35
A.4	Evolução dos Componentes Principais . . . . .	45
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>49</b>

# Lista de Figuras

2.1	Esquema para a interpolação . . . . .	7
2.2	Histogramas dos Invariantes . . . . .	8
2.3	Gráfico de Dispersão com defasagens . . . . .	8
3.1	Evolução da Explicação do 1° e 2° Componente Principal . . . . .	14
3.2	Evolução da Explicação do 3° Componente e da soma dos 3 primeiros Componentes Principais . . . . .	15
3.3	Evolução da Explicação do 1° e 2° Componente Principal . . . . .	15
3.4	Evolução da Explicação do 3° Componente e da soma dos 3 primeiros Componentes Principais . . . . .	16
5.1	Volatilidade Histórica x Paramétrica . . . . .	27
5.2	Estrutura de volatilidade dos três componentes principais. Os pontos representam os valores históricos (autovetor da matriz de correlação) e as linhas contínuas as funções calibradas . . . . .	27
5.3	Cenários de estresse para 2 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 5.6 . . . . .	28
5.4	Cenários de estresse para 2 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 5.7 . . . . .	29
5.5	Cenários de estresse para 2 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 5.8 . . . . .	30
5.6	Cenários de estresse para 2 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 5.9 . . . . .	31
5.7	Cenários de estresse para 3 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 5.9 . . . . .	31
5.8	Cenários de estresse para 3 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 5.10 . . . . .	32

# Lista de Tabelas

5.1	Contratos com maior volume negociado no período analisado . . . . .	25
5.2	Vértices em dias úteis utilizados para a calibração do modelo . . . . .	26
5.3	Decomposição dos invariantes de mercado em seus componentes principais . . . . .	26
5.4	Parâmetros calibrados . . . . .	26
5.5	Coefficientes da regressão não linear . . . . .	26
5.6	Estresse estabelecido para construir cenários de nível. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base. Cenários de Estresse da BM&FBOVESPA em agosto de 2013. . . . .	28
5.7	Estresse estabelecido para construir cenários de inclinação. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base. Cenários de Estresse da BM&FBOVESPA em agosto de 2013. . . . .	29
5.8	Estresse estabelecido para construir cenários de curvatura. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base. Cenários de Estresse da BM&FBOVESPA em agosto de 2013. . . . .	30
5.9	Estresse estabelecido para construção dos cenários. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base. . . . .	30
5.10	Estresse estabelecido para construção dos cenários alternativos. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base. . . . .	32

# Capítulo 1

## Introdução

Após a ocorrência de diversas crises financeiras nos últimos anos um maior rigor nos procedimentos de proteção e avaliação de riscos tornaram-se necessários. Eventos, trouxeram muitos prejuízos não apenas para as instituições financeiras mas também para seus clientes, fez-se necessário a criação ou implementação de medidas preventivas para tentar mitiga-los.

As formas tradicionais de controle de risco como VaR (*"Value at Risk"*), *Duration* e Índice de Alavancagem são bons indicadores, mas não são apropriados em situações de crise por se tratarem de modelos que tem como hipótese inicial a "situação normal de mercado". Assim, houve a necessidade de criar modelos para momentos de estresse (mudanças abruptas nos preços dos ativos), complementando-os com os modelos tradicionais de gerenciamento de risco.

Essa avaliação da perda potencial de uma carteira contemplando o risco de evento ou estresse tem tido uso crescente no meio acadêmico ou na comunidade financeira, sendo que, nesta última, de maneira espontânea ou por imposição regulatória. O exemplo mais recente do uso regulatório do teste de estresse ocorreu nos Estados Unidos da América no começo de 2009, quando todas as instituições financeiras foram obrigadas a avaliar o risco de suas carteiras utilizando o conceito de teste de estresse.

O objetivo da aplicação de testes de estresse reside em identificar e quantificar sob quais cenários de alteração abruptas de preços incorreriam-se em perdas significativas, quantificando-as tanto quanto possível. Os testes de estresse são métricas mais robustas para mensurar riscos que ocorrem com baixa probabilidade, entretanto apresentam limitações. A principal delas é o caráter subjetivo na determinação dos cenários. Dessa forma, a qualidade do teste de estresse depende, em grande maneira, da experiência e sensibilidade do profissional envolvido.

Todavia, verifica-se, nos últimos anos, uma tendência entre os participantes do mercado e as entidades reguladoras em completar as medidas de risco com as estimativas de teste de estresse. Por exemplo, o Banco Central do Brasil submete as instituições financeiras a testes de estresse para avaliar a resiliência de cada instituição em suportar situações extremas sem comprometer a estabilidade do sistema financeiro (Banco Central do Brasil, 2009). <sup>1</sup>.

De acordo com o relatório divulgado pelo BIS (*Bank for International Settlements*) em dezembro de 2012, os ativos de renda fixa incluindo seus derivativos são os ativos mais negociados em volume no mundo. Todas as instituições financeiras e fundos de investimentos possuem como lastro de suas carteiras os títulos públicos. Devido a esse fato o controle de risco bem como a criação de cenários para a taxa de juros é necessário, caso contrário poderia acarretar

---

<sup>1</sup>A base legal é dada pela resolução 3464 de 26/06/2007, compõe a base legal que institui a necessidade de testes de estresse para avaliar a adequação de capital das instituições financeiras. A Circular 3478 de 24/12/2009 qualifica os critérios complementares para a realização do teste de estresse para as instituições que adotam modelos internos para avaliação de risco de mercado

em perdas expressivas para essas instituições.

O mercado lida com uma grande diversidade de títulos que podem pagar cupons ou não, com diferentes maturidades e conseqüentemente com diferentes taxas de juros. Para cada vencimento existe uma taxa de juros futura associada que reflete a expectativa do mercado para a média das taxas de juros de curto prazo de hoje até a maturidade. A estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) é a relação entre a taxa de juros e o seu respectivo vencimento.

Devido a relevância da modelagem da taxa de juros somado a necessidade que os participantes de mercado possuem em complementar as métricas de risco já utilizadas e as imposições regulatórias para a utilização do teste de estresse tornam o tema de estudo fundamental.

A literatura sobre construção de testes de estresse, bem como a definição dos cenários de estresse tem crescido ao longo dos anos. Em [Dario and Fernández(2011)], trabalho que servirá de base para o presente estudo, os autores através da análise componentes principais reduzem a dimensão do problema utilizando os três primeiros componentes, modelam a curva de juros via Heath-Jarrow-Morton e geram cenários de estresse em momentos de grande volatilidade. A utilização dos três primeiros componentes principais para a curva de juros se tornou padrão após o trabalho de [Litterman and Scheinkman(1991)], mas em momentos de muita volatilidade do mercado a sua ordem de explicação não é tão clara.

Em [Dario(2004)] o autor faz uso da Teoria dos Valores Extremos, TVE, para a geração de cenários de estresse para fatores de risco *spot* e temporais não correlacionados. A teoria dos valores extremos é um ramo de estatística que se preocupa com os eventos com valores máximos e mínimos de um conjunto de dados, [Coles(2001)]. A grande vantagem da teoria dos valores extremos para mensuração de risco, em comparação a outras metodologias é que a TVE reconhece que existem características e propriedades encontradas nos extremos amostrais que nem sempre estão relacionadas ao comportamento do centro da distribuição. Por esse motivo, pode-se considerá-la uma metodologia interessante para previsão de perdas em momentos de crise financeira. A vantagem do uso da TVE resolve o problema do caráter subjetivo uma vez que emprega abordagem probabilística para a geração de cenários. Entretanto, a despeito de sua propriedade para os fatores de risco *spot*, bem como para a geração de choques "paralelos" nos fatores temporais, a mesma não seria apropriada para a construção de cenários que contemplem outros movimentos na estrutura temporal.

[Rezende(2008)] propõe uma metodologia de construção de cenários de estresse para as curvas de juros utilizando a autoregressão quantílica. As regressões quantílicas permitem fatiar as distribuições condicionais da variável de resposta de uma regressão, inclusive suas caudas, e, portanto, dá a possibilidade de formular cenários extremos para as curvas de juros, formalizando-os e tornando-os menos subjetivos. Por exemplo, uma regressão na mediana divide as densidades condicionais em duas metades com probabilidades iguais a 0,5. Já uma regressão no 99º percentil as divide em uma parte com 0,99 e outra com 0,01 de probabilidade. As autoregressões podem ser utilizadas então para a formulação de cenários extremos probabilísticos condicionais de deslocamentos da curva de juros. O autor estima cenários condicionais para as variações paralelas e de inclinação da curva de juros doméstica, incorporando assim a correlação entre os diferentes vértices da Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ), ausente por exemplo no trabalho de [Dario(2004)]. A metodologia proposta se mostra capaz de gerar cenários que simulam os movimentos pouco prováveis das curvas de juros observados na realidade, tornando os testes de estresse baseados nas curvas de juros menos subjetivos. Devido a esse fato, o modelo proposto se torna menos flexível para a combinação de elementos subjetivos.

Em termos comparativos o que diferencia a classe de modelos HJM dos modelos mais conhecidos da literatura de taxas de juros, tal como os modelos unifatoriais é o fato que estes últimos modelam a evolução de um conjunto de variáveis de estado  $X_1(t), \dots, X_N(t)$  e as taxas *forwards*

são obtidas como subproduto. Adicionalmente, caso fossem empregados modelos unifatoriais para a dinâmica da taxa de juros, as taxas *forwards* de quaisquer maturidade seriam perfeitamente correlacionadas, o que torna os modelos unifatoriais de uso limitado, principalmente para modelar movimentos não paralelos na curva de juros.

Este trabalho tem por objetivo diminuir a subjetividade na obtenção dos cenários de estresse, fundamentados sobre a estrutura a termo da taxa de juros através do modelo de Heath-Jarrow-Morton (HJM) [Shreve(2010)]. O modelo HJM modela a dinâmica de um conjunto de taxas *forwards* diretamente e, pela ausência de arbitragem constrói a curva *spot* diretamente. Além disso, o modelo se mostra flexível para a combinação de elementos subjetivos na criação dos cenários de estresse. A principal contribuição é complementar de forma empírica o estudo feito por [Dario and Fernández(2011)] quanto a utilização da Análise de Componentes Principais em momentos de grande volatilidade no mercado de juros brasileiro.

Complementa esta introdução a seção 1.1, onde são relacionadas as principais metodologias para condução do teste de estresse. No capítulo 2 apresenta-se a Estrutura a Termo da Taxa de Juros, seus invariantes e suas especificidades no mercado brasileiro. O capítulo 3 aborda a Análise de Componentes Principais e sua aplicação no mercado de juros brasileiro. No capítulo 4, o modelo HJM junto com a sua estrutura de volatilidade e a correspondente versão discreta é apresentado. A implementação do modelo no mercado brasileiro é feita no capítulo 5 e as considerações finais no capítulo 6.

## 1.1 Metodologias para o Teste de Estresse

Testes de estresse se referem a uma gama de técnicas que ajudam a avaliar a vulnerabilidade de estruturas ou instituições financeiras em eventos excepcionais, mas factíveis de acontecer. Há duas etapas distintas no teste de estresse. A primeira é a elaboração do modelo econômico e em segundo lugar a aplicação de um choque exógeno para a obtenção de um cenário de estresse. Segundo [Jorion(2006)], a parte mais sensível de um teste de estresse é a construção dos cenários, que torna o método subjetivo e dependente do conhecimento e sensibilidade de quem determina o que pode afetar ou não uma carteira.

Atualmente existem algumas metodologias disponíveis para a realização do teste de estresse, as quais apresentam vantagens e desvantagens de acordo com a sua utilização. Segundo [Dario and Fernández(2011)], as principais metodologias para a determinação dos cenários para a realização do teste de estresse são:

- i) **Análise de Cenário:** Criação e uso de cenários potenciais futuros para medir o *Profit and Loss* - P&L - da posição <sup>2</sup>;
- ii) **Simulação Histórica:** Utilização de eventos passados para a determinação do P&L, principalmente aqueles que geraram as maiores variações no valor do portfólio <sup>3</sup>;
- iii) **VaR estressado:** Os parâmetros que são utilizados no cálculo do VaR são estressados. Modifica-se, por exemplo, a volatilidade dos ativos, bem como a estrutura de correlação <sup>4</sup>;
- iv) **Teste de estresse sistemático:** Consiste na criação de uma série de cenários de estresse para os principais fatores de risco de um portfólio. A diferença entre este método e os anteriores é que a avaliação de risco do portfólio é feita de maneira sistêmica e de tal forma

---

<sup>2</sup>Para maiores detalhes consultar [Ringland(2006)].

<sup>3</sup>Especificidades da simulação histórica se encontra no [Jorion(1997)].

<sup>4</sup>Detalhes sobre o método VaR estressado e Teste de estresse sistemático estão no [Hull(2012)].

que contemple todos os riscos envolvidos e não apenas de forma pontual para contemplar alguns fatores de risco do portfólio.

Os testes de estresse apresentam limitações, entretanto são métricas mais robustas para mensurar riscos que ocorrem com baixa probabilidade. São limitações: o caráter subjetivo na determinação dos cenários, como resultado, a qualidade do teste de estresse depende, em grande maneira, da experiência e sensibilidade do profissional envolvido. Um segundo problema apontado é a dificuldade para interpretar os resultados obtidos uma vez que, na maioria das vezes, não temos associada a probabilidade de ocorrência do evento. Logo, por não estar probabilisticamente embasada, a realização de uma grande perda na ocorrência de um cenário não implicará necessariamente na alteração do portfólio por parte da instituição.

A relevância de cada uma das críticas acima pode ser considerada, até certo ponto, como limitante à adoção do teste de estresse como uma ferramenta de uso constante pelas instituições financeiras. Entretanto, o trabalho realizado é capaz de corrigir algumas das falhas consideradas e, portanto tende a ser uma metodologia relevante na atribuição de cenários de estresse, bem como sua probabilidade de ocorrência para modelar o risco de mercado para a Estrutura a Termo da Taxa de Juros.



## Capítulo 2

# Estrutura a Termo das Taxas de Juros

A taxa de juros é uma das variáveis de maior interesse em Economia. Seu estudo tem se constituído em uma das ferramentas mais importantes para subsidiar a condução da política monetária e desta forma, influenciar o desempenho da economia. Seu comportamento afeta a inflação, valor da taxa de câmbio, fluxo de recursos externos, dentre outros componentes econômicos.

A Estrutura a Termo das Taxas de Juros (ETTJ) representa taxas de juros para diversos vencimentos, com o objetivo de precificar ativos financeiros préfixados. A metodologia da estrutura consiste em criar uma curva de juros, tomando-se como base os negócios realizados na BM&F dos Contratos Futuros de Depósitos Interfinanceiros (DI Futuro).

### 2.1 DI Futuro

O ativo financeiro DI Futuro tem como objeto de negociação a taxa média acumulada do CDI (Certificado de Depósito Interbancário, títulos emitidos por instituições financeiras nas operações realizadas exclusivamente entre elas, geralmente negociados por um dia, estabelecendo assim o padrão da taxa média diária, que é utilizada como um referencial para os juros). A taxa tem o período compreendido entre a data de negociação (inclusive) e um dia útil anterior ao seu prazo de vencimento (sempre no 1º dia útil do mês). Sua liquidação ocorre com o valor final de R\$ 100.000,00 e seu PU (Preço Unitário, preço de 1 contrato do ativo de uma determinada data, calculada de acordo com a remuneração do papel ) é obtido através da seguinte fórmula:

Como o valor final para liquidação é sempre R\$ 100.000,00 e o papel segue uma remuneração a juros compostos:

$$PU \times \left( 1 + \frac{i}{100} \right)^{\frac{du}{252}} = 100.000, \quad (2.1.1)$$

e assim segue que:

$$PU = \left( \frac{100.000}{\left( 1 + \frac{i}{100} \right)^{\frac{du}{252}}} \right), \quad (2.1.2)$$

onde : PU = Preço Unitário negociado no mercado;  $i$  = taxa de juros expressa ao ano (base 252 du);  $du$  = dias úteis a partir da data base de negociação do contrato até o vencimento.

Com os PU's dos DI's Futuro encontram-se as taxas pré-fixadas referentes a cada vencimento do papel. As variáveis de estudo não são necessariamente as taxas nos vencimentos de cada papel e sim as taxas em dias fixados (geralmente, 1º dia útil do mês). Como estes, via de regra, ocorrem entre datas de dois vencimentos consecutivos, utiliza-se interpolação para encontrar as taxas nesses dias, denominadas vértices, que são as taxas em vencimentos específicos

(geralmente, uma vez por mês). A BM&F disponibiliza diariamente em seu sítio eletrônico<sup>1</sup> os PU's de todos os contratos negociados do ativo DI Futuro.

Para criar uma curva de juros pela ETTJ, é necessário calcular a taxa de juros de um contrato a partir do PU, obtida isolando a variável  $i$  da Equação(2.1.2):

$$i = \left( \left( \frac{100.000}{\text{PU}} \right)^{\frac{d_u}{252}} - 1 \right) \times 100. \quad (2.1.3)$$

Porém, verifica-se a necessidade de se obter taxas para os prazos onde não existam negócios para a obtenção da curva de juros, ou seja, não existem contratos de DI Futuro para esses prazos e para isso utiliza-se o método de interpolação exponencial, devido ao regime de capitalização composto aplicado ao juros do ativo e à larga utilização nas instituições financeiras.

O fator, definido como:

$$\text{fator}(i, d_u) = \left( 1 + \frac{i}{100} \right)^{\frac{d_u}{252}}, \quad (2.1.4)$$

leva um valor financeiro presente à um valor financeiro futuro a uma taxa de juros anualizada  $i$ , em  $d_u$  dias úteis.

Assim, com 2 contratos de DI Futuro com vencimentos adjacentes, o primeiro com uma taxa negociada no mercado por  $i_1$  e prazo de vencimento de  $d_1$  dias úteis e o segundo com uma taxa negociada por  $i_2$  e prazo de vencimento de  $d_2$  dias úteis, obtêm-se um fator interpolado para  $d_i$  dias úteis com  $d_1 < d_i < d_2$  através de:

$$\text{fator}_{\text{interpolado}} = \left( \left( 1 + \frac{i}{100} \right)^{\frac{d_i}{252}} \times \left( \frac{\left( 1 + \frac{i_2}{100} \right)^{\frac{d_2}{252}}}{\left( 1 + \frac{i_1}{100} \right)^{\frac{d_1}{252}}} \right)^{\frac{d_i - d_1}{d_2 - d_1}} \right), \quad (2.1.5)$$

onde:  $\text{fator}_{\text{interpolado}}$  = fator interpolado ao período de  $d_i$  dias úteis;  $i_1$  = taxa correspondente ao vértice imediatamente inferior a  $d_i$ ;  $d_1$  = prazo de  $i_1$ , em dias úteis;  $i_2$  = taxa correspondente ao vértice imediatamente superior a  $d_i$ ;  $d_2$  = prazo de  $i_2$ , em dias úteis;  $d_i$  = prazo de  $i$ , em dias úteis.

Observando a fórmula se percebe que  $\left( 1 + \frac{i_1}{100} \right)^{\frac{d_1}{252}}$  é o fator acumulado de  $d_1$  dias úteis à taxa de  $i_1$ , isto é, leva-se um valor presente por  $d_1$  dias úteis a uma taxa de  $i_1$ ; com

$$\frac{\left( 1 + \frac{i_2}{100} \right)^{\frac{d_2}{252}}}{\left( 1 + \frac{i_1}{100} \right)^{\frac{d_1}{252}}} \quad (2.1.6)$$

se tem o fator compreendido entre os períodos de  $d_1$  e  $d_2$  dias úteis. Porém, como o interesse é encontrar o fator para o período em questão de  $d_i$  dias úteis, pondera-se o fator compreendido entre  $d_1$  e  $d_2$  dias úteis elevado a  $\frac{d_i - d_1}{d_2 - d_1}$ , lembrando que o regime é de juros compostos. A figura 2.1 facilita a compreensão do processo de interpolação. O  $\text{fator}_{\text{interpolado}}$  obtido é o fator que levará o valor financeiro presente ao valor financeiro futuro em  $d_i$  dias úteis a uma taxa  $i_{ap}$  (ao período de  $d_i$  dias úteis). Para obter a taxa a.a.(ao ano) do  $\text{fator}_{\text{interpolado}}$  na base 252 dias úteis, seguindo a padronização adotada pela BM&F, em analogia com a Equação (2.1.3) utiliza-se:

$$i_{a.a} = \left( (\text{fator}_{\text{interpolado}})^{\frac{252}{d_i}} - 1 \right) \times 100, \quad (2.1.7)$$

em que,  $i_{a.a}$  = taxa de juros anualizado na base de 252 dias úteis;  $\text{fator}_{\text{interpolado}}$  = fator interpolado ao período de  $d_i$  dias úteis;  $d_i$  = prazo de  $i$ , em dias úteis.

<sup>1</sup><http://www.bmfbovespa.com.br/shared/iframeBoletim.aspx?altura=5600&idioma=pt-br&url=www2.bmf.com.br/pages/portal/bmfbovespa/boletim1/Ajustes1.asp>

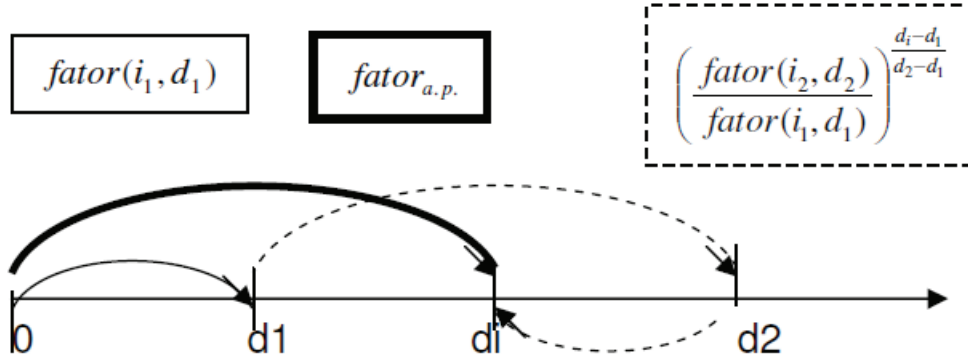


Figura 2.1: Esquema para a interpolação

## 2.2 Invariantes de Mercado

[Meucci(2009)] define invariantes de mercado como "quantidades" que apresentam o mesmo comportamento no decorrer do tempo, permitindo que se aprenda com o passado. Por exemplo, para ações, os invariantes de mercado são os retornos, para os títulos públicos os invariantes são as mudanças nas taxas para cada vencimento. Para determinar os invariantes através das informações disponíveis no mercado alguns conceitos precisam ser definidos.

Considere o tempo inicial  $\tilde{t}$  e o intervalo de tempo  $\tilde{\tau}$  que será o intervalo de estimação. Considere  $D$  o conjunto de tempos igualmente espaçados:

$$D_{\tilde{t}, \tilde{\tau}} = \{\tilde{t}, \tilde{t} + \tilde{\tau}, \tilde{t} + 2\tilde{\tau}, \dots\}. \quad (2.2.1)$$

Considere o conjunto de variáveis aleatórias:

$$X_t, \quad t \in D_{\tilde{t}, \tilde{\tau}}. \quad (2.2.2)$$

As variáveis aleatórias  $X_t$  são invariantes de mercado para o tempo inicial  $\tilde{t}$  e o intervalo de estimação  $\tilde{\tau}$  se elas são independentes e identicamente distribuídas e se a realização de  $x_t$  sobre  $X_t$  estão disponíveis no tempo  $t$ .

Por exemplo, suponha que o intervalo de estimação  $\tilde{\tau}$  é uma semana e o ponto de partida  $\tilde{t}$  é a primeira segunda-feira após o dia 1º de janeiro de 2000. Neste caso  $D_{\tilde{t}, \tilde{\tau}}$  é o conjunto de todas as segundas-feiras, desde 1º de janeiro de 2000. Considere o lançamento de uma moeda honesta, toda segunda-feira desde 1º de janeiro de 2000. Um dos resultados é independente do outro, eles são distribuídos de forma idêntica (50% cara, 50% coroa), e o resultado de cada lançamento é conhecido imediatamente. Portanto, o resultados dos lançamentos da moeda são invariantes para o ponto de partida "primeira segunda-feira após 1º de janeiro de 2000", e um intervalo de estimação semanal.

O invariante homogêneo no tempo é aquele cuja distribuição não depende do tempo de referência  $\tilde{t}$ . O presente trabalho irá buscar somente invariantes homogêneos no tempo.

Para detectar os invariantes é necessário analisar a série temporal disponível. As séries temporais de um conjunto genérico de variáveis aleatórias é o conjunto de realizações passadas dessas variáveis aleatórias. Denotando como  $T$  o tempo atual, as séries temporais é o conjunto

$$x_t, \quad t = \tilde{t}, \tilde{t} + \tilde{\tau}, \dots, T, \quad (2.2.3)$$

onde a notação em letra minúscula indica que  $x_t$  é a realização da variável aleatória  $X_t$  ocorrida no passado, no tempo  $t$ .

Para determinar a invariância, dois gráficos serão utilizados. O primeiro, consiste em dividir a série de dados (2.2.3) em duas novas séries:

$$x_t, \quad t = \tilde{t}, \dots, \tilde{t} + \left\lceil \frac{T-t}{2\tilde{\tau}} \right\rceil \tilde{\tau} \quad (2.2.4)$$

$$x_t, \quad t = \left( \left\lceil \frac{T-t}{2\tilde{\tau}} \right\rceil + 1 \right) \tilde{\tau}, \dots, T, \quad (2.2.5)$$

onde  $\lceil \cdot \rceil$  denota a parte inteira. Então compara-se os dois histogramas gerados. Se  $X_t$  é invariante, em particular todos os termos da série são identicamente distribuídos, então os dois histogramas gerados serão similares. O que pode ser observado pelo teste realizado em dados reais na figura 2.2.<sup>2</sup>

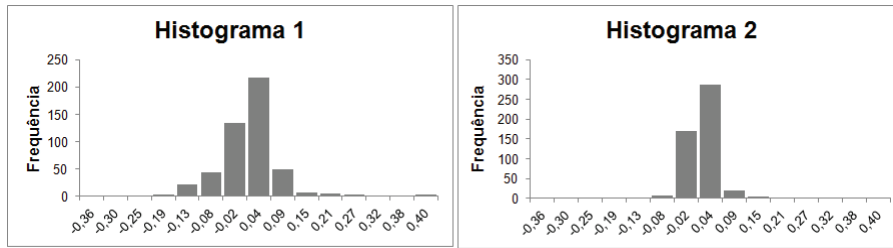


Figura 2.2: Histogramas dos Invariantes

O segundo teste consiste na análise do gráfico de dispersão da série (2.2.3) contra defasagens dessa mesma série. Em outras palavras, compara-se as séries:

$$x_t \text{ versus } x_{t-\tilde{\tau}}, \quad t = \tilde{t} + \tilde{\tau}, \dots, T. \quad (2.2.6)$$

Se  $X_t$  é invariante, em particular todos os termos da série são identicamente distribuídos, então o gráfico de dispersão será simétrico em relação ao eixo de referência. Mais ainda, como todos os termos são *i.i.d.*, o gráfico de dispersão terá a forma de nuvem circular, o que pode ser observado na figura 2.3.

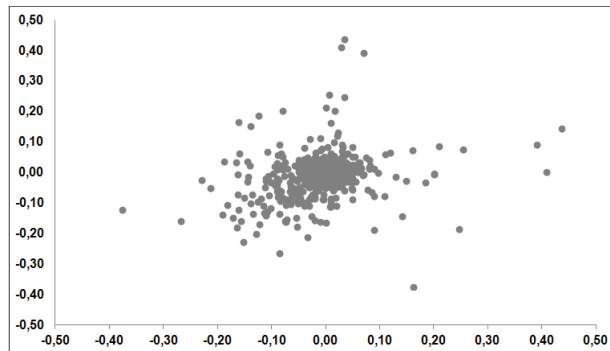


Figura 2.3: Gráfico de Dispersão com defasagens

Para o mercado de renda-fixa, segundo [Meucci(2009)], o invariante de mercado é a variação da taxa de juros até o vencimento do título analisado (*changes in yield to maturity*). O que pode ser observado pelo teste realizado com dados reais e será com esses invariantes que o trabalho será realizado.

<sup>2</sup>Para o teste foi utilizado dados diários do vértice 21 no período entre janeiro de 2003 até dezembro de 2004

# Capítulo 3

## Análise de Componentes Principais - ACP

O objetivo principal da Análise de Componentes Principais é obter um número de combinações lineares de um conjunto de variáveis que seja suficientemente explicativa, ou seja, que basta umas poucas combinações lineares para que juntas tenham a soma das variâncias bem próximas da soma das variâncias das séries originais.

Seja um vetor aleatório  $X \in \mathbb{R}^N$ , com média  $\mu$  e matriz de variância-covariância  $\Sigma$  e seja  $A \in \mathbb{R}^{N \times n}$  uma matriz de transformações lineares. Se quer escolher  $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$  tal que considerando apenas alguns elementos do vetor de combinações lineares  $Y = A^t X$ , as variâncias desses elementos sejam capazes de dar explicação suficiente das somas das variâncias de  $\Sigma$ , ou seja, se aproxime ao traço de  $\Sigma$ .

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= E(YY^t) - E(Y)E(Y^t) \\ &= E(A^t X (A^t X)^t) - E(A^t X)E((A^t X)^t) \\ &= E(A^t X X^t A) - E(A^t X)E(X^t A) \\ &= A^t E(X X^t) A - A^t E(X)E(X^t) A \\ &= A^t (E(X X^t) - E(X)E(X^t)) A \\ &= A^t \text{Var}(X) A \\ &= A^t \Sigma A. \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

O Teorema da Decomposição Espectral (maiores detalhes em [Meucci(2009)]) permite decompor uma matriz simétrica  $\Sigma$  em uma matriz diagonal  $\Lambda$  composta dos autovalores  $\lambda_i$  de  $\Sigma$  e uma matriz  $P$  composta pelos autovetores ortonormais  $P_i$ , representado por

$$\Sigma = P \Lambda P^t, \tag{3.0.2}$$

onde:  $P^t = P^{-1}$ ,

$\Sigma$  é a matriz de variância-covariância,

$P$  é a matriz ortonormal cujas colunas são formadas pelos autovetores de  $\Sigma$  associados a  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ ,

$\Lambda$  é a matriz diagonal formada pelos autovalores de  $\Sigma$ , isto é,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{3.0.3}$$

Então,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}^t. \quad (3.0.4)$$

Entre os autovalores de  $\Sigma$  é habitual no processo de Análise de Componentes Principais permutar-se as colunas de  $P$  de modo que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ , onde  $P = [P_1, P_2, \cdots, P_n]$  são os autovetores associados aos autovalores.

$A$  é escolhido de tal forma que  $Y = A^t X$  preserve ao máximo as variâncias de  $\Sigma$ , com as restrições  $A_i^t A_j = 0$  para  $i \neq j$  (para garantir que cada coordenada  $Y_i$  explore componentes diferentes da soma das variâncias de  $\Sigma$ ) obtêm-se assim uma matriz cujos vetores são ortogonais entre si. Pela arbitrariedade da escolha do comprimento do vetor  $Y_i$ , escolhe-se  $\|A_i\| = 1$ , onde  $\|\cdot\|$  denota a norma euclidiana, resultando em  $A$  ser uma matriz com componentes ortonormais. Recai-se então no Teorema da Decomposição Espectral que permite concluir  $A = P$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \text{Var}(A^t X) \\ &= A^t \Sigma A = A^t P \Lambda P^t A \\ &= P^t P \Lambda P^t P \\ &= \Lambda \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.0.5)$$

Isto significa que:

$$\text{Var}(Y_1) = \text{Var}(P_1^t X) = \lambda_1,$$

$$\text{Var}(Y_2) = \text{Var}(P_2^t X) = \lambda_2,$$

$\vdots$

$$\text{Var}(Y_n) = \text{Var}(P_n^t X) = \lambda_n,$$

e  $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$  são independentes.

Dessa forma, se nota que a soma das variâncias da diagonal de  $\Sigma$  é igual à soma das variâncias da matriz  $\Lambda$ , pois:

$$\text{tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \quad \sigma_i^2 = \text{Var}(X_i), i = 1, 2, \cdots, n,$$

e da propriedade do traço de matrizes quadradas  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  se obtém, por (3.0.2),

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Sigma) &= \text{tr}(P \Lambda P^t) = \text{tr}(\Lambda P^t P) = \text{tr}(\Lambda P^{-1} P) \\ &= \text{tr}(\Lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad i = 1, \cdots, n, \end{aligned} \quad (3.0.6)$$

e assim pode-se perceber que  $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Então, conclui-se que  $Y_1 = P_1^t X$  dá uma proporção de explicação das variâncias em  $\Sigma$  de  $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}$ ,  $Y_1 = P_1^t X$  e  $Y_2 = P_2^t X$  juntas dão

uma proporção de explicação das variâncias em  $\Sigma$  de  $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$ , e assim sucessivamente. Com isso, se escolhe o número de componentes principais, que juntas dêem uma explicação aceitável das variâncias de  $\Sigma$ , ou seja, considera-se um número de primeiras componentes principais de modo que o percentual de explicação das variâncias de  $\Sigma$  seja suficientemente alta e aceitável.

### 3.1 ACP e a ETTJ

As taxas de juros possuem componentes estocásticos. Desse modo, deve-se modelar cada uma delas como sendo composto por um termo determinístico (podendo ser uma tendência ou um *drift*) e um termo aleatório, ou seja,

$$g_i \equiv df_i = \mu_i dt + \sigma_i dz_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1.1)$$

onde  $\mu_i$  é o parâmetro de tendência ou *drift*,  $\sigma_i$  é o desvio-padrão de  $g_i$  e  $dz_i$  é a componente aleatória com distribuição normal de média 0 e variância 1 (maior formalidade será dada no capítulo 4).

Para a mesma variável  $g_i$ , realizações de  $dz_i$  em diferentes momentos de tempo são assumidas independentes entre si, ou seja, os incrementos  $dz_i(t_1)$  e  $dz_i(t_2)$  são independentes em momentos diferentes. Isto implica

$$E(dz_i(t_1), dz_i(t_2)) = 0. \quad (3.1.2)$$

Porém, para dois vértices diferentes,  $g_i$  e  $g_j$  para  $i \neq j$ , os incrementos  $dz_i$  e  $dz_j$  são correlacionados em um mesmo instante de tempo  $t$ , ou seja

$$E(dz_i(t), dz_j(t)) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}(t), \quad (3.1.3)$$

onde  $\rho_{ij}$  é a correlação entre as taxas dos vértices  $i$  e  $j$ ,  $i \neq j$ .

Analisando as covariâncias e omitindo o termo de dependência em  $t$  (para simplificar a notação),

$$\text{cov}(df_i, df_j) = E(df_i, df_j) - E(df_i)E(df_j), \quad (3.1.4)$$

mas

$$E(df_i) = E(\mu_i dt + \sigma_i dz_i) = E(\mu_i dt) + E(\sigma_i dz_i) = \mu_i dt, \quad (3.1.5)$$

pois  $dz_i$  possui média igual a 0. No cálculo das variâncias, como aos termos de ordem maior que  $dt$ , são muito pequenos eles podem ser desprezados.

Assumi-se  $\mu_i = 0$ , pois sendo um termo determinístico pode-se anular o seu efeito através de um *hedge*. Portanto, voltando a (3.1.4),

$$\text{cov}(df_i, df_j) = E(df_i, df_j), \quad (3.1.6)$$

e de (3.1.3) e (3.1.6) segue que

$$E(df_i, df_j) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} dt, \quad \text{se } i \neq j \quad e \quad (3.1.7)$$

$$E(df_i, df_i) = \text{Var}(df_i) = \sigma_i^2 dt, \quad \rho_{ii} = 1. \quad (3.1.8)$$

Pode-se transformar  $G$ , o vetor composto pelas variáveis  $g_i$  de (3.1.1), em um vetor  $Y$ ,

$$Y = A^t G, \quad (3.1.9)$$

como discutido na seção anterior, escolhe-se  $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]$  de modo que a soma das variâncias de  $\text{Var}(Y)$  seja igual à soma das variâncias de  $\text{Var}(G)$ , com

$$\sum_{k=1}^n a_{ks}a_{kr} = 0 \quad \text{para } s \neq r, \quad (3.1.10)$$

onde  $A = (a_{ij})$ , impondo a restrição de ortogonalidade dos vetores coluna de  $A$ .

Então, de (3.1.9),

$$y_s = \sum_{k=1}^n a_{ks}g_k, \quad (3.1.11)$$

em palavras,  $y_s$  é uma combinação linear dos juro dos vértices,  $s = 1, 2, \dots, n$ . Juntando com a restrição,

$$\sum_{k=1}^n a_{ks}a_{kr} = 1 \quad \text{para } s = r, \quad (3.1.12)$$

impõe-se assim a ortonormalidade dos vetores colunas de  $A$  e consequentemente

$$A^t A = I \Leftrightarrow A^t = A^{-1}, \quad (3.1.13)$$

como  $Y = A^t G$ , se obtém:

$$Y = A^t G = A^{-1} G \Leftrightarrow AY = AA^{-1} G \Leftrightarrow AY = IG \Leftrightarrow G = AY. \quad (3.1.14)$$

ou

$$g_j = \sum_s a_{js} y_s. \quad (3.1.15)$$

De (3.1.7) e (3.1.8):

$$\text{cov}(df_i, df_j) = E(df_i, df_j) = E \left( \left( \sum_s a_{is} y_s \right) \left( \sum_r a_{jr} y_r \right) \right) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} dt \quad (3.1.16)$$

e

$$\text{var}(df_i) = E(df_i)^2 = E \left( \left( \sum_s a_{is} y_s \right)^2 \right) = E \left( \sum_s \sum_r a_{is} a_{ir} y_s y_r \right). \quad (3.1.17)$$

Uma interpretação geométrica, considere um vetor  $V_g$  de dimensão  $n$  de componentes  $Vg_i$

$$Vg = \begin{bmatrix} Vg_1 \\ Vg_2 \\ \vdots \\ Vg_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 dz_1 \\ \sigma_2 dz_2 \\ \vdots \\ \sigma_n dz_n \end{bmatrix}, \quad (3.1.18)$$



o comprimento de  $Vg$  é dado por

$$\begin{aligned}
L(Vg) &:= \sum_j \sigma_j^2 = \sum_j (E(g_j^2) - E(g_j)^2) \\
&= \sum_j E(df_j)^2 = E \sum_j (df_j^2) \\
&= E \left( \sum_j \sum_s \sum_r a_{js} a_{jr} y_s y_r \right) \\
&= E \left( \sum_s \sum_r \left( \sum_j (a_{js} a_{jr} y_s y_r) \right) \right) \\
&= E \left( \sum_s \sum_r y_s y_r \left( \sum_j (a_{js} a_{jr}) \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

com as restrições da ortonormalidade da matriz  $A$  dadas em (3.1.10) e (3.1.12)  $L(Vg)$  é simplificada para

$$L(Vg) = E \left( \sum_j y_j y_j \right) = \sum_j E(y_j^2) = \sum_j \sigma_j^2. \tag{3.1.20}$$

Seja  $y_s$ ,

$$y_s = \mu_s dt + \sigma_{y_s} dz_s, \quad \text{para } s = 1, 2, \dots, n, \tag{3.1.21}$$

Como é assumido que as partes determinísticas de  $g$  são nulas, então  $\mu_s = 0$ . Só há então as componentes aleatórias. Tais  $y_s$  compõem o vetor  $Y = A^t G$  com  $A$  uma matriz ortonormal como discutido anteriormente. Então a matriz de variâncias-covariâncias de  $Y$  é diagonal, que foi denotada por  $\Lambda$ , ou seja,

$$Var(Y) = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{3.1.22}$$

onde  $\lambda_i$  é a variância de  $y_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , e o comprimento de  $Vy$  é dado por:

$$L(Vy) = \sum_{j=1}^n Var(y_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

Voltando para (3.1.20), segue que

$$L(Vg) = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \tag{3.1.23}$$

A interpretação geométrica da transformação  $A$  é rotacionar o vetor coluna original  $Vg$  em um novo vetor coluna  $Vy$  cujos componentes são os desvios padrões  $\sqrt{\lambda_{i'}}$  das variáveis  $y_{i'}$  multiplicadas pelos incrementos independentes brownianos  $dw_{i'}$ .

Passa-se então de uma estrutura de juros  $g$  para outra  $y$ , com a nova estrutura apresentando uma matriz de variâncias-covariâncias diagonal. Isso traduz em dizer que com a componente  $y_s$  se tem a proporção de  $\frac{\lambda_s}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}$  de explicação das variâncias originais e que para duas componentes distintas de  $y$  consideradas conjuntamente a contribuição obtida na explicação da variância é aditiva.

## 3.2 Aplicação da ACP na ETTJ

O presente trabalho tem por objetivo a geração de cenários de estresse para a estrutura a termo da taxa de juros e uma pergunta recorrente no desenvolvimento do mesmo foi o quanto de explicação da variância se conseguia na análise de componentes principais em momentos de estresse nos mercados. Após o trabalho de [Litterman and Scheinkman(1991)] se tornou padrão o uso das três primeiras componentes principais, mas seu poder de explicação em momentos de estresse não era tão claro.

Para a aplicação da análise de componentes principais foram utilizados dados diários entre janeiro de 2003 e junho de 2013. Nesse período, ocorreram crises financeiras e portanto foi possível testar a explicação gerada pelas três primeiras componentes principais em momentos de estresse.

Por não haver a necessidade de se estudar todos os pontos da curva de juros, já que em dois pontos consecutivos os juros se alteram muito pouco, acrescentando poucas informações às variáveis) será utilizado "vértices" da curva, representando os meses para o vencimento subsequentes à data base. O vértice de 21 dias úteis representa um mês subsequente à data base, o vértice de 42 dias úteis representa dois meses e assim sucessivamente.

Para a análise da explicação da variância obtida através de componentes principais no período analisado foram realizados testes com janela móvel de 5 anos, ou seja, de 02/janeiro/2003 a 28/dezembro/2007 calculou-se as três primeiras componentes principais bem com a soma, move-se então 1 dia a frente e calcula-se novamente as três primeiras componentes principais e a soma, no período de 03/janeiro/2003 a 02/janeiro/2008 e assim sucessivamente até o dia 28/junho/2013.

Com a metodologia acima, dois testes foram realizados nos invariantes de mercado: no primeiro, utilizou-se 97 vértices disponíveis na curva de juros, são eles 1, 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189, 210, 231, 252, 273, 294, 315, 336, 357, 378, 399, 420, 441, 462, 483, 504, 525, 546, 567, 588, 609, 630, 651, 672, 693, 714, 735, 756, 777, 798, 819, 840, 861, 882, 903, 924, 945, 966, 987, 1008, 1029, 1050, 1071, 1092, 1113, 1134, 1155, 1176, 1197, 1218, 1239, 1260, 1281, 1302, 1323, 1344, 1365, 1386, 1407, 1428, 1449, 1470, 1491, 1512, 1533, 1554, 1575, 1596, 1617, 1638, 1659, 1680, 1701, 1722, 1743, 1764, 1785, 1806, 1827, 1848, 1869, 1890, 1911, 1932, 1953, 1974, 1995, 2016. O resultado obtido é expresoado na figura 3.1 e 3.2.

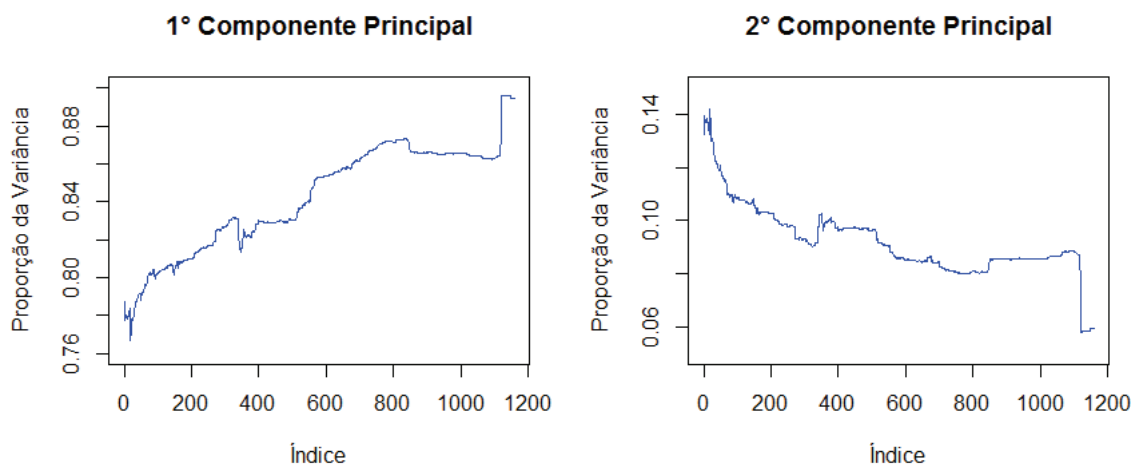
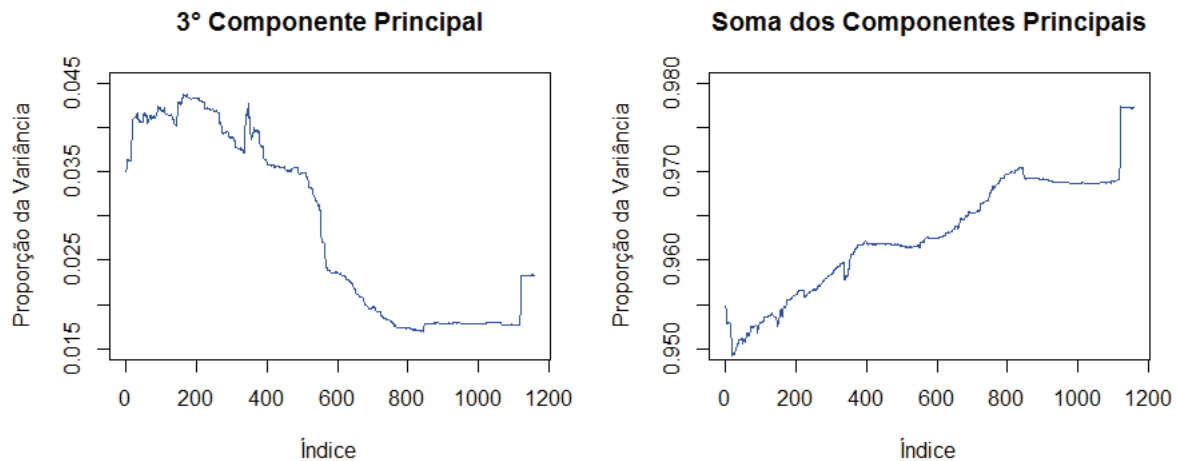


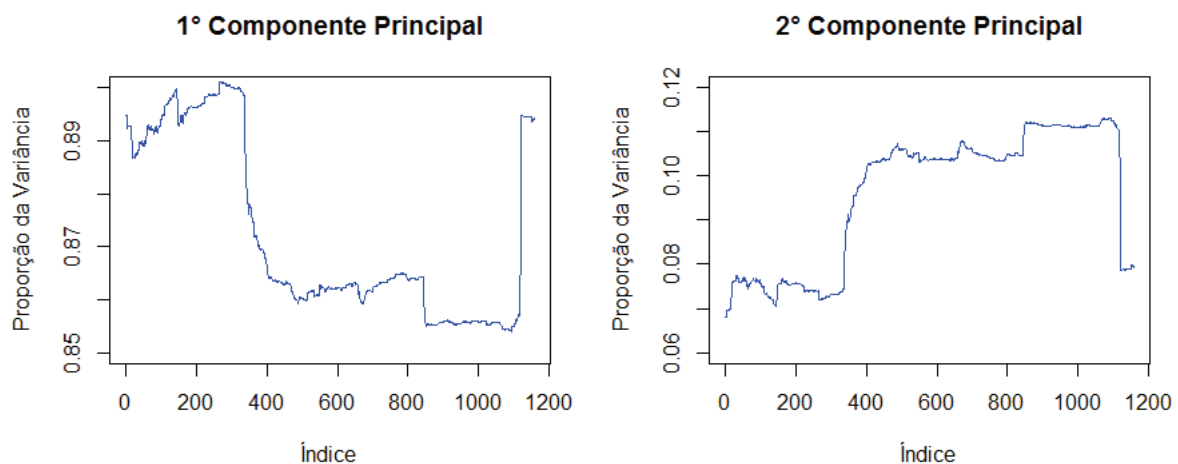
Figura 3.1: Evolução da Explicação do 1º e 2º Componente Principal



**Figura 3.2:** Evolução da Explicação do 3° Componente e da soma dos 3 primeiros Componentes Principais

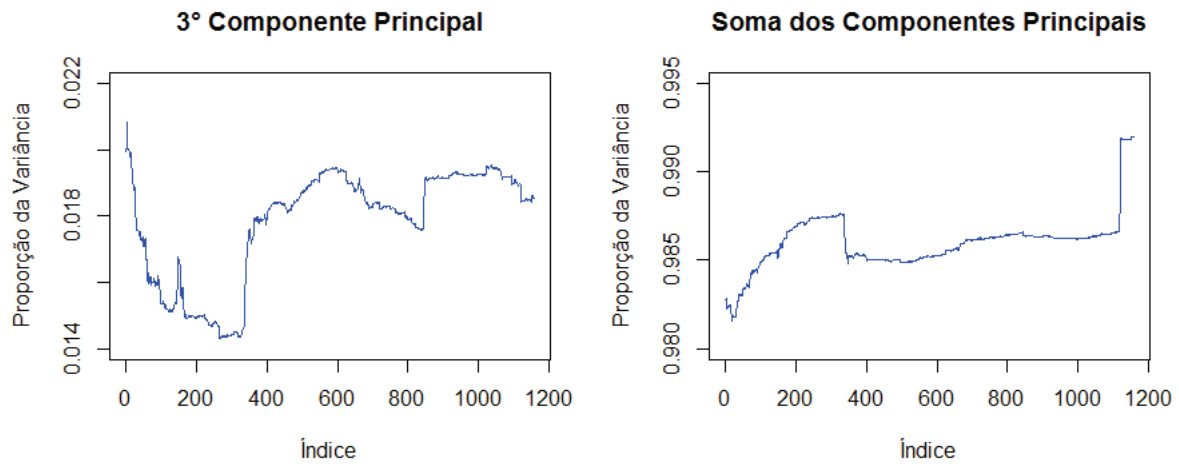
Como se pode observar a explicação das componentes principais individuais variam muito com o passar do tempo, mas a soma das 3 primeiras componentes principais permanece com uma ordem de explicação muito satisfatória, sempre acima de 95% de explicação. O que se constata é que quando uma componente individual perde explicação, essa perda é compensada por outra componente de forma que a soma permanece sempre com boa explicação da variância dos dados originais.

Na busca por uma ordem de explicação ainda mais satisfatória, o segundo teste realizado utilizou apenas os vértices mais negociados da curva de juros. Para a escolha desses vértices foi analisado o volume negociado em uma semana (2° semana de novembro de 2013) escolhendo apenas os 10 vértices mais negociados. O objetivo aqui é evitar o problema gerado pela interpolação dos vértices que não são negociados. Os vértices escolhidos foram: 84, 147, 210, 273, 336, 462, 588, 714, 840, 1092. As figuras 3.3 e 3.4 mostram os resultados obtidos.



**Figura 3.3:** Evolução da Explicação do 1° e 2° Componente Principal

A ordem de explicação obtida analisando os vértices mais negociados foi ainda mais satisfatória. A proporção da variância explicada dos dados originais quando se analisa a soma dos



**Figura 3.4: Evolução da Explicação do 3° Componente e da soma dos 3 primeiros Componentes Principais**

3 primeiros componentes principais foi de no mínimo 98%. Aqui também foi possível constatar que quando uma componente individual perde explicação, essa perda é compensada por outra componente de forma que a soma permanece sempre com boa explicação da variância dos dados originais.

Através dos resultados obtidos pode-se concluir que mesmo em momentos de grandes oscilações, mais notadamente em momentos de estresse no mercado de juros, a análise de componentes principais pode ser utilizada, pois mantém elevada a ordem de explicação da variância dos dados originais.

# Capítulo 4

## O Modelo de Heath-Jarrow-Morton

O modelo Heath-Jarrow-Morton (HJM) abordado nesse capítulo modela a dinâmica da curva de taxas de juros *forward* no tempo. Existem várias formas de representar a curva de juros e a escolhida pelo método HJM é em termos de taxas *forward*.

### 4.1 Taxas *forward*

Seja o tempo  $\bar{T}$  fixo de forma que os títulos ou contratos discutidos a seguir terão vencimento menor ou igual a  $\bar{T}$ . Seja  $0 \leq t \leq T \leq \bar{T}$  e  $B(t, T)$  o preço de um título zero-coupon livre de risco no tempo  $t$  e vencimento em  $T$  cujo valor de face é 1. Adota-se que para cada  $t$  e  $T$  que satisfaça  $0 \leq t \leq T \leq \bar{T}$ ,  $B(t, T)$  é definido  $B(t, T)$ . Se a taxa de juros entre  $t$  e  $T$  é estritamente positiva, então  $B(t, T)$  é estritamente menor que 1 quando  $t \leq T$ .

No tempo  $t$ , implementa-se a seguinte estratégia para o tempo  $T$  e seja  $\delta$  um pequeno número positivo.

- Tomar uma posição vendida em títulos com vencimento  $T$  e valor 1 o que gera renda de  $B(t, T)$ .

- Tomar uma posição comprada de tamanho  $\frac{B(t, T)}{B(t, T+\delta)}$  e vencimento em  $(T + \delta)$  no valor de  $B(t, T)$ .

O custo da estratégia no tempo  $t$  é 0. No tempo  $T$  o detentor da estratégia terá que desembolsar 1 para cobrir a posição vendida e em  $T + \delta$  irá receber  $\frac{B(t, T)}{B(t, T+\delta)}$  pela posição comprada. Em outras palavras, se investe 1 no tempo  $T$  e recebe mais que 1 em  $T + \delta$ . A taxa que explica o lucro no tempo  $T + \delta$  é

$$\frac{1}{\delta} \log \frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)} = - \frac{\log B(t, T + \delta) - \log B(t, T)}{\delta}. \quad (4.1.1)$$

Esta é a taxa de juros composta contínua que aplicado 1 no tempo  $T$ , irá retornar  $\frac{B(t, T)}{B(t, T+\delta)}$  em  $T + \delta$ . Se o título  $B(t, T + \delta)$  de vencimento longo tem o preço pequeno, o que deverá acontecer se a taxa de juros é estritamente positiva, então o quociente  $\frac{B(t, T)}{B(t, T+\delta)}$  é estritamente maior que 1 e a taxa é estritamente positiva. A taxa em (4.1.1) mesmo para um investimento no tempo  $T$ , pode ser travada em  $t$ . É fato que se o investidor propõe em  $t$  alguma outra estratégia no tempo  $T$  com uma outra taxa de juros, então aceitando a taxa de juros oferecida e montando o portfólio proposto acima, pode-se ter arbitragem.

Se define taxa *forward* no tempo  $t$  para um investimento em  $T$ ,

$$\begin{aligned} f(t, T) &= -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log B(t, T + \delta) - \log B(t, T)}{\delta} \\ &= -\frac{\partial}{\partial T} \log B(t, T). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Esse é o limite para a taxa (4.1.1) quando  $\delta \rightarrow 0$  e pode ser interpretada como sendo a taxa de juros instantânea para o tempo  $T$  que pode ser obtida no tempo  $t$ .

Se  $f(t, T)$  é conhecido para todos os valores de  $0 \leq t \leq T \leq \bar{T}$ , se obtém  $B(t, T)$  para todos os valores de  $0 \leq t \leq T \leq \bar{T}$  através da fórmula

$$\int_t^T f(t, v) dv = -[\log B(t, T) - \log B(t, t)] = -\log B(t, T), \quad (4.1.3)$$

onde se usa o fato que  $B(t, t) = 1$ . Portanto,

$$B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, v) dv\right), \quad 0 \leq t \leq T \leq \bar{T}. \quad (4.1.4)$$

A partir do preço dos títulos, pode-se determinar as taxas *forward* através de (4.1.2). Através das taxas *forward* se obtém o preço através da Equação (4.1.4). Teoricamente, não parece ter problema em construir o modelo através das taxas *forward* ou através dos preços. Na prática, pela condição de não arbitragem o modelo se torna mais simples quando obtido através das taxas *forward*.

Seja a taxa de juros no tempo  $t$ ,

$$r(t) = f(t, t). \quad (4.1.5)$$

Esta é a taxa de juros instantânea que se pode obter em  $t$  para investimentos ou empréstimos em  $t$ .

## 4.2 A dinâmica das taxas *forward* e o preço dos títulos

Assumindo que  $f(0, T)$ ,  $0 \leq T \leq \bar{T}$ , é conhecido no tempo 0. Essa é a curva de taxa *forward* inicial. No modelo HJM, a taxa *forward* para tempos maiores  $t$  para investimento em tempo ainda maiores em  $T$  é dada por

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(u, T) du + \int_0^t \sigma(u, T) dW(u). \quad (4.2.1)$$

Com sua forma diferencial

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.2.2)$$

sendo  $T$  a partir de agora constante.

O processo  $W(u)$  é o movimento browniano sobre a medida  $\mathbb{P}$ . Em particular,  $\alpha(t, T)$  é o *drift* sobre a medida atual. Os processos  $\alpha(t, T)$  e  $\sigma(t, T)$  podem ser aleatórios. Para cada  $T$  fixo, eles são processos adaptados para a variável  $t$ . Para simplificar a notação, se assumirá que a taxa *forward* será gerada por um único movimento browniano.

De (4.2.2), se obtém a dinâmica do preço dos títulos através de (4.1.4). Pelo fato de  $-\int_t^T f(t, v) dv$  ter  $t$ -variáveis em dois lugares, sua derivada terá dois termos,

$$d\left(-\int_t^T f(t, v) dv\right) = f(t, t) dt - \int_t^T df(t, v) dv. \quad (4.2.3)$$

O primeiro termo do lado direito da equação resulta da derivada com respeito ao limite de integração  $t$ . O fato desse limite inferior produzir um sinal negativo irá cancelar com o sinal negativo do lado esquerdo. O outro termo resulta da derivada com respeito a  $t$  sobre a integral. Utilizando (4.1.5) e (4.2.2),

$$d\left(-\int_t^T f(t, v) dv\right) = r(t) dt - \int_t^T [\alpha(t, v) dt + \sigma(t, v) dW(t)] dv. \quad (4.2.4)$$

Invertendo a ordem de integração,

$$\int_t^T \alpha(t, v) dt dv = \int_t^T \alpha(t, v) dv dt = \alpha^*(t, T) dt, \quad (4.2.5)$$

$$\int_t^T \sigma(t, v) dW(t) dv = \int_t^T \sigma(t, v) dv dW(t) = \sigma^*(t, T) dW(t), \quad (4.2.6)$$

onde

$$\alpha^*(t, T) = \int_t^T \alpha(t, v) dv, \quad \sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, v) dv. \quad (4.2.7)$$

Substituindo os termos,

$$d\left(-\int_t^T f(t, v) dv\right) = r(t) dt - \alpha^*(t, T) dt + \sigma^*(t, T) dW(t). \quad (4.2.8)$$

Para o preço do título,

$$dB(t, T) = B(t, T) \left[ r(t) - \alpha^*(t, T) + \frac{1}{2} (\sigma^*(t, T))^2 \right] dt - \sigma^*(t, T) B(t, T) dW(t). \quad (4.2.9)$$

### 4.3 Mercado Livre de Arbitragem

O modelo HJM adota que para todo  $T \in \bar{T}$  existe um título zero-coupon com vencimento em  $T$ . Para isso, é preciso garantir que não existe oportunidade de arbitragem para esses títulos. Ocorre arbitragem quando para uma determinada estratégia de custo 0 existir probabilidade maior que 0 de se obter lucro. Para garantir esta condição a medida de probabilidade  $\mathbb{P}$  sobre o qual o preço do título descontado

$$D(t)B(t, T) = \exp\left(-\int_0^t r(u) du\right) B(t, T), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.3.1)$$

é um martingal.

$$dD(t) = -r(t)D(t) dt, \quad (4.3.2)$$

então, se obtém a derivação

$$\begin{aligned} d(D(t)B(t, T)) &= -r(t)D(t)B(t, T) dt + D(t)dB(t, T) \\ &= D(t)B(t, T) \left[ \left( -\alpha^*(t, T) + \frac{1}{2} (\sigma^*(t, T))^2 \right) dt - \sigma^*(t, T) dW(t) \right] \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Se quer igualar o termo destacado na Equação (4.3.3) a

$$-\sigma^*(t, T)[\theta(t) dt + dW(t)], \quad (4.3.4)$$

utilizando o teorema de Girsanov,<sup>1</sup> e mudando para a medida de probabilidade  $\tilde{\mathbb{P}}$

$$\tilde{W}(t) = \int_0^t \theta(u) du + W(t) \quad (4.3.5)$$

é um browniano. Utilizando esse browniano, pode-se reescrever (4.3.3)

$$d(D(t)B(t, T)) = -D(t)B(t, T)\sigma^*(t, T)d\tilde{W}(t). \quad (4.3.6)$$

Então, segue que  $D(t)B(t, T)$  é um martingal sobre  $\tilde{\mathbb{P}}$ . Em outras palavras, precisa-se encontrar um processo  $\theta(t)$  que atenda

$$-\alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t, T))^2 = \sigma^*(t, T)\theta(t). \quad (4.3.7)$$

A Equação (4.3.7) representa uma infinidade de equações, uma para cada vencimento  $T \in (0, \bar{T}]$  e conseqüentemente infinitas fontes de incerteza. Entretanto, existe somente um processo  $\theta(t)$ . Esse processo é o *market price of risk* preço de mercado do risco e existirá tantos processos quantos forem as fontes de incerteza. Neste caso, por simplificação, existe apenas um browniano no modelo.

Diferenciando a Equação (4.3.7), em relação a  $T$ ,

$$-\alpha(t, T) + \sigma^*(t, T)\sigma(t, T) = -\sigma(t, T)\theta(t) \quad (4.3.8)$$

ou de forma equivalente,

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) [\sigma^*(t, T) + \theta(t)]. \quad (4.3.9)$$

**Teorema 1** (HJM sobre a condição de não arbitragem). *O modelo de estrutura a termo para um título zero-coupon para todos os vencimentos entre  $(0, \bar{T}]$  e regido por um único browniano não admite arbitragem se existe o processo  $\theta(t)$  que resolve (4.3.9) para todo  $0 \leq t \leq T \leq \bar{T}$ . Onde  $\alpha(t, T)$  e  $\sigma(t, T)$  são o drift e a difusão, respectivamente da taxa forward. Isto é, o processo satisfaz (4.2.2),  $\sigma^*(t, T) = \int_t^T \sigma(t, v) dv$ , e  $\theta(t)$  é o preço de mercado do risco.*<sup>2</sup>

Então, como  $\sigma(t, T) \neq 0$ , resolvendo (4.3.9) para  $\theta(t)$ :

$$\theta(t) = \frac{\alpha(t, T)}{\sigma(t, T)} - \sigma^*(t, T), \quad (4.3.10)$$

Isto mostra que  $\theta(t)$  é único e a medida neutra ao risco é única. Logo, todos os derivativos sobre taxa de juros podem ser *hedged* por títulos zero-coupon, ou seja, o mercado é livre de arbitragem.

Através da condição de não arbitragem, se reescreve (4.2.2)

$$\begin{aligned} df(t, T) &= \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW(t) \\ \sigma(t, T)\sigma^*(t, T) dt + \sigma(t, T) [\theta(t) + dW(t)] \\ \sigma(t, T)\sigma^*(t, T) dt + \sigma(t, T) d\tilde{W}t, \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

onde  $\tilde{W}t$  é dado por (4.3.5). Logo, se observa que o *drift* pode ser escrito somente em função da volatilidade do processo.

<sup>1</sup>O teorema permite mudar uma equação diferencial estocástica após mudar o espaço de medida aonde ela esta inserida. Se baseia no fato que o *drift* depende particularmente da medida de probabilidade  $\mathbb{P}$  em seu espaço de probabilidade e mudando a medida de probabilidade de forma apropriada o *drift* se altera enquanto o coeficiente difusivo permanece o mesmo. Maiores detalhes sobre definições e conceitos consultar [Brigo and Mercurio(2001)] página 911.

<sup>2</sup>A demonstração do teorema se encontra no [Shreve(2010)] página 428



## 4.4 Generalização do HJM para a dinâmica das taxas *forward*

Heath, Jarrow and Morton (1992) assumiram que, para o vencimento fixo  $T$ , a taxa de juros *forward* instantânea  $f(t, T)$  pode ser definida como

$$\begin{aligned} df(t, T) &= \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW(t) \\ f(0, T) &= f^M(0, T), \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

com  $T \rightarrow f^M(0, T)$  a curva da taxa *forward* instantânea em  $t = 0$ , e onde

$$W = (W_1, W_2, \dots, W_n),$$

é um movimento browniano  $n$ -dimensional. A dimensão é dada pela quantidade de fatores de risco ou de incerteza que influenciam a ETTJ, aqui denotado por  $\nu$ . Seja

$$\sigma(t, T) = (\sigma_1(t, T), \sigma_2(t, T), \dots, \sigma_\nu(t, T))$$

é o vetor de processos adaptados e  $\alpha(t, T)$  também é um processo. O produto  $\sigma(t, T) dW(t)$  é o produto escalar entre os vetores  $\sigma(t, T)$  e  $dW(t)$ .

Pela condição de não arbitragem, a função  $\alpha$  que é o *drift* depende do vetor de volatilidade  $\sigma$ , então

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds = \sum_{j=1}^{\nu} \sigma_j(t, T) \int_t^T \sigma_j(t, s) ds, \quad (4.4.2)$$

então, a dinâmica de  $f(t, T)$  é

$$\begin{aligned} f(t, T) &= f(0, T) + \int_0^t \sigma(u, t) \int_u^T \sigma(u, s) ds du + \int_0^t \sigma(s, T) dW(s) \\ &= f(0, T) + \sum_{j=1}^{\nu} \int_0^t \sigma_j(u, T) \int_u^T \sigma_j(u, s) ds du + \sum_{j=1}^{\nu} \int_0^t \sigma_j(s, T) dW_j(s) \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

e fica totalmente especificada quando o vetor da função de volatilidade  $\sigma$  é conhecido.

Como o objetivo é aplicar o modelo considerando dados observados e como a taxa *forward* instantânea não é observável e não é bem aproximada para vencimentos longos, trabalha-se com a expressão do modelo HJM para a taxa de juros *spot*  $r_t$ ,

$$\begin{aligned} r_t = f(t, t) &= f(0, t) + \int_0^t \sigma(u, t) \int_u^t \sigma(u, s) ds du + \int_0^t \sigma(s, T) dW(s) \\ &= f(0, t) + \sum_{j=1}^{\nu} \int_0^t \sigma_j(u, T) \int_u^t \sigma_j(u, s) ds du + \sum_{j=1}^{\nu} \int_0^t \sigma_j(s, T) dW_s. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Como as taxas de juros são observadas em intervalos não contínuos, descreve-se na sequência os passos para obter uma versão discreta da expressão dada na Equação (4.4.4). O modelo de diferenças finitas da taxa de juros considerando  $\nu$  fatores pode ser descrito como segue. A variável  $\alpha$  para simplificação de notação será agora chamada de  $\mu$ .

$$\Delta r_t = \mu_t \Delta t + \sigma_t \Delta W_t \quad (4.4.5)$$

$$\widehat{r_{t+\Delta t}} - r_t = \mu_t \Delta t + \sigma_t \sqrt{\Delta t} Z_t \quad (4.4.6)$$

$$\widehat{r_{t+\Delta t} - r_t} = \mu_t \Delta t + \sum_{j=1}^{\nu} \sigma_t^j \sqrt{\Delta t} Z_t^j \quad (4.4.7)$$

sendo  $Z_t^j$  uma variável gaussiana padrão tal que  $Z_t^j$  é independente de  $Z_t^s$  para  $j \neq s$  e  $j = 1, \dots, \nu$ . A seguir é utilizada a análise de componentes principais para determinar a quantidade de fatores  $\nu$  a serem modelados. Conforme discutido no capítulo 3, são escolhidos os três maiores autovalores, identificados como a representação dos movimentos de deslocamento do nível, inclinação e curvatura, ou seja,  $\nu = 3$ . Assumindo  $N$  vértices e  $K$  observações constroe-se a dinâmica empírica da taxa como segue.

$$\widehat{r_{t+1} - r_t} = \hat{\mu}_t + \hat{C} Y_t \quad (4.4.8)$$

sendo  $Y_t$  um vetor de  $N$  variáveis aleatórias gaussianas e

$$\widehat{r_{t+1} - r_t} = \begin{pmatrix} (r_{t+1}^1 - r_t^1)/\hat{\sigma}^1 \\ (r_{t+1}^2 - r_t^2)/\hat{\sigma}^2 \\ \vdots \\ (r_{t+1}^N - r_t^N)/\hat{\sigma}^N \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{K-1} (r_{t+1}^1 - r_t^1)/\hat{\sigma}^1 \\ \sum_{t=1}^{K-1} (r_{t+1}^2 - r_t^2)/\hat{\sigma}^2 \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{K-1} (r_{t+1}^N - r_t^N)/\hat{\sigma}^N \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \hat{\rho}^{1N} \\ \hat{\rho}^{21} & \cdots & \hat{\rho}^{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}^{N1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4.9)$$

sendo  $r_t^i$  a taxa observada na data  $t$  para a maturidade  $i$ ,  $\hat{\sigma}^i$  o desvio padrão amostral da série

$$(r_{t+1}^i - r_t^i)_{t=1}^{K-1} \quad (4.4.10)$$

e  $\hat{\rho}^{ij}$  o coeficiente de correlação das séries (4.4.10) e

$$(r_{t+1}^j - r_t^j)_{t=1}^{K-1}. \quad (4.4.11)$$

Denota-se por  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  os autovalores de  $\hat{C}$ , assumindo que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ , e por  $\Lambda$  a matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}. \quad (4.4.12)$$

A matriz dos autovetores correspondentes é denotada por  $V$ . Assim, pela análise de componentes principais tem-se que

$$\hat{C} Y_t = V \Lambda^2 V^{-1} Y_t = V \Lambda^2 Z_t \approx \sum_{j=1}^3 \sqrt{\lambda_j} V_{ij} Z_t^j = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \sqrt{\lambda_j} V_{1j} Z_t^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^3 \sqrt{\lambda_j} V_{Nj} Z_t^j \end{pmatrix}. \quad (4.4.13)$$

Aplicando a aproximação anterior em (4.4.8) se obtém

$$r_{t+1}^i - r_t^i = \hat{\mu}^i \hat{\sigma}^i + \sum_{j=1}^3 \sqrt{\lambda_j} V_{ij} \hat{\sigma}^i Z_t^j \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.4.14)$$

Da comparação dos termos estocásticos das equações (4.4.7) e (4.4.14), para  $\nu = 3$ , obtém-se

$$\sigma_t^j \approx \sqrt{\frac{\lambda_j}{\Delta t}} V_{ij} \hat{\sigma}^i \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.4.15)$$

como foram utilizadas obsevações diárias, a expressão acima se transforma

$$\sigma_t^j \approx \sqrt{\frac{\lambda_j}{1/252}} V_{ij} \hat{\sigma}^i. \quad (4.4.16)$$

Portanto, os autovetores obtidos na análise de componentes principais permitem estimar a estrutura de volatilidade.

Após a discussão do método, uma segunda etapa para a implementação do modelo HJM é a escolha da função de volatilidade, [James and Webber(2000)]. Para estimar a estrutura de volatilidade de cada fator  $j$  e ter uma dependência suave em relação aos vencimentos, os autovetores serão acoplados a funções analíticas paramétricas que possam ser facilmente integradas e os parâmetros são calibrados através de mínimos quadrados. Basicamente é um modelo gaussiano com um termo de correção.<sup>3</sup> A expressão funcional da volatilidade utilizada é

$$\sigma_t^j(T) = (\alpha_j + \beta_j(T-t))e^{\gamma_j(T-t)} + \delta_j \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.4.17)$$

Para obter o *drift* livre de arbitragem correspondente, aqui já utilizando a relação  $\alpha = \mu$  é necessário integrar a Equação (4.4.2) substituindo  $\sigma_t^j(T)$  pela Equação (4.4.17). Assim, se obtém

$$\mu_t(T) = \sum_{j=1}^3 \sigma_t^j(T) \left[ \delta_j(T-t) + \frac{\beta_j}{\gamma_j}(T-t)e^{\gamma_j(T-t)} + (e^{\gamma_j(T-t)} - 1)\left(\frac{\alpha_j}{\gamma_j} - \frac{\beta_j}{\gamma_j^2}\right) \right]. \quad (4.4.18)$$

Antes de continuar com a calibragem dos parâmetros, é importante observar que espera-se que os parâmetros  $\gamma_j$  da Equação (4.4.17) sejam valores negativos para reproduzir o comportamento regularmente observado de  $\sigma_t^j$ , isto é, volatilidade quase constante para vencimentos longos. Como dito anteriormente, os parâmetros  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  e  $\delta_j$  são obtidos pelo método dos mínimos quadrados procurando ajustar a forma funcional da Equação (4.4.17) à volatilidade histórica. Logo  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  e  $\delta_j$  são tais que minimizam a média do erro quadrático das maturidades (neste caso  $i$  é o vencimento/vértice correspondente e  $N$  a quantidade de vértices)  $i = 1, \dots, N$ , isto é,

$$\operatorname{argmin} \sum_{i=1}^N \left( (\alpha_j + \beta_j \frac{i}{252})e^{\gamma_j \frac{i}{252}} + \delta_j - \sqrt{\frac{\lambda_j}{1/252}} V_{ij} \hat{\sigma}^i \right)^2, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.4.19)$$

Uma vez determinados os parâmetros das formas funcionais das volatilidades é imediato calcular o *drift* e assim obtém-se, para cada vértice  $T_i$ , a estrutura temporal da taxa de juros

$$r_{0+1}(T_i) = r_0(T_i) + \frac{1}{252}\mu(T_i) + \sqrt{\frac{1}{252}} (\sigma^1(T_i)\xi_1 + \sigma^2(T_i)\xi_2 + \sigma^3(T_i)\xi_3), \quad (4.4.20)$$

sendo  $\xi_1, \xi_2$  e  $\xi_3$  variáveis aleatórias independentes com distribuição gaussiana padrão.

Para utilizar a expressão anterior como uma previsão da taxa num período de HP dias deve-se adaptar (4.4.20)

$$r_{0+HP}(T_i) = r_0(T_i) + \frac{HP}{252}\mu(T_i) + \sqrt{\frac{HP}{252}} (\sigma^1(T_i)\xi_1 + \sigma^2(T_i)\xi_2 + \sigma^3(T_i)\xi_3). \quad (4.4.21)$$

O passo seguinte é determinar os choques, isto é, os valores das variáveis  $\xi_1, \xi_2$  e  $\xi_3$  para a construção dos cenários de estresse.

<sup>3</sup>Detalhes da forma funcional da volatilidade podem ser encontrados em [Reno(2002)] página 4

## 4.5 Construção dos Cenários

Após a descrição do modelo teórico e a sua calibração, devem ser definidos os choques nas variáveis independentes  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  para se obter a ETTJ num cenário de estresse. Essa definição é equivalente a determinar os três movimentos principais da curva, isto é nível, inclinação e curvatura. Assim, assume-se que se deseja construir um cenário que satisfaça para três vértices dados  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  os choques correspondentes  $choque_1$ ,  $choque_2$  e  $choque_3$ .

A foma intuitiva para a determinação dos choques é perceber que a taxa de juros para  $HP$  dias pode ser interpretada com a taxa de juros em  $t = 0 + choque$ .

$$r_{0+HP}(T_i) = r_0(T_i) + choque. \quad (4.5.1)$$

Igualando as Equações (4.5.1) e (4.4.21), define-se o elo entre a estimativa de nível, inclinação e curvatura e a definição dos valores extremos para as variáveis  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ .

$$\frac{HP}{252} \begin{pmatrix} \mu(T_1) \\ \mu(T_2) \\ \mu(T_3) \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{HP}{252}} \begin{pmatrix} \sigma^1(T_1) & \sigma^2(T_1) & \sigma^3(T_1) \\ \sigma^1(T_2) & \sigma^2(T_2) & \sigma^3(T_2) \\ \sigma^1(T_3) & \sigma^2(T_3) & \sigma^3(T_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} choque_1 \\ choque_2 \\ choque_3 \end{pmatrix} \quad (4.5.2)$$

O sistema acima pode ser interpretado da seguinte maneira, determinando os três pontos

$$(T_1, choque_1), \quad (T_2, choque_2) \quad e \quad (T_3, choque_3)$$

se obtém os três movimentos da ETTJ desejados, isto é, nível, inclinação e curvatura para um *holding period* HP dado.

A seguir é aplicado o modelo HJM nos dados do mercado brasileiro de juros, conforme descrito nesta seção.

# Capítulo 5

## Implementação no Mercado Brasileiro

Neste capítulo será aplicado todo o arcabouço matemático proposto aos dados reais do mercado brasileiro.

### 5.1 Calibração do Modelo

A implementação do modelo HJM, passa por escolher os vértices a serem estudados; análise de componentes principais dos invariantes de mercado e estimação da volatilidade paramétrica.

#### 5.1.1 A escolha dos Vértices

Como discutido anteriormente, o modelo HJM modela a dinâmica de um conjunto de taxas *forward* diretamente e, pela ausência de arbitragem constrói a curva *spot*. A contrapartida a este modelo é a necessidade de descrever a evolução de toda curva de juros, o que, em última instância, seria um problema de dimensão infinita caso não seja restringido o número de taxas de interesse.

Para restringir o número de taxas de interesse, foram escolhidos os vértices mais negociados da curva de juros na BM&F. Para a escolha desses vértices foi analisado o volume negociado em uma semana (2<sup>o</sup> semana de novembro de 2013).

Vencimento	Dias Úteis	% Negociado
Abril/14	$\approx 94$	15,2%
Janeiro/16	$\approx 535$	13,5%
Janeiro/17	$\approx 786$	13,2%
Janeiro/15	$\approx 285$	13,1%
Janeiro/14	$\approx 32$	12,9%
Julho/14	$\approx 155$	11,5%
julho/15	$\approx 408$	5,3%
Outubro/14	$\approx 221$	2,7%
Julho/17	$\approx 910$	1,8%
Janeiro/21	$\approx 1810$	1,6%

Tabela 5.1: Contratos com maior volume negociado no período analisado

Analisando a liquidez dos contratos, foram escolhidos os seguintes vértices para calibrar a estrutura de volatilidade.

$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_7$	$T_8$	$T_9$	$T_{10}$
84	147	210	273	336	462	588	714	840	1092

Tabela 5.2: Vértices em dias úteis utilizados para a calibração do modelo

### 5.1.2 Análise de Componentes Principais

Para os vértices da tabela 5.2 foram analisadas as variações diárias da taxa de juros prefixada desde janeiro de 2003 até junho de 2013. Essas taxas foram obtidas via interpolação exponencial dos contratos futuros de DI negociados na BM&FBOVESPA, conforme discutido no capítulo 2. Com os dados históricos escolhidos foram calculados os invariantes de mercado e aplicado a análise de componentes principais. Os resultados obtidos são expressos na tabela 5.3.

Componente	Explicação
1° (nível)	88,60%
2° (inclinação)	7,61%
3° (curvatura)	2,02%
Total	98,23%

Tabela 5.3: Decomposição dos invariantes de mercado em seus componentes principais

O uso das três primeiras componentes foi suficiente para explicar mais de 98% da variação da taxa de juros no período analisado. O resultado obtido se mostra de acordo com o discutido no capítulo 3.

### 5.1.3 Estimação da Volatilidade Paramétrica

A partir dos dados obtidos na análise de componentes principais foi aplicado o processo de otimização para a obtenção dos parâmetros das funções de volatilidade, conforme expresso na Equação (4.4.19), os dados obtidos são: Com os seguintes coeficientes  $R^2$  das regressões não

	$\sigma^1$	$\sigma^2$	$\sigma^3$
$\alpha$	2,797	-1,985	-2,874
$\beta$	2,157	-2,959	-3,135
$\gamma$	-1,680	-0,938	-0,400
$\delta$	-3,108	1,556	3,777

Tabela 5.4: Parâmetros calibrados

lineares:

	$\sigma^1$	$\sigma^2$	$\sigma^3$
$R^2$	0,997	0,999	0,997

Tabela 5.5: Coeficientes da regressão não linear

Na análise dos gráficos de volatilidade, figura 5.1 e dos coeficientes  $R^2$  pode-se concluir que o modelo paramétrico utilizado consegue reproduzir de forma muito satisfatória a volatilidade

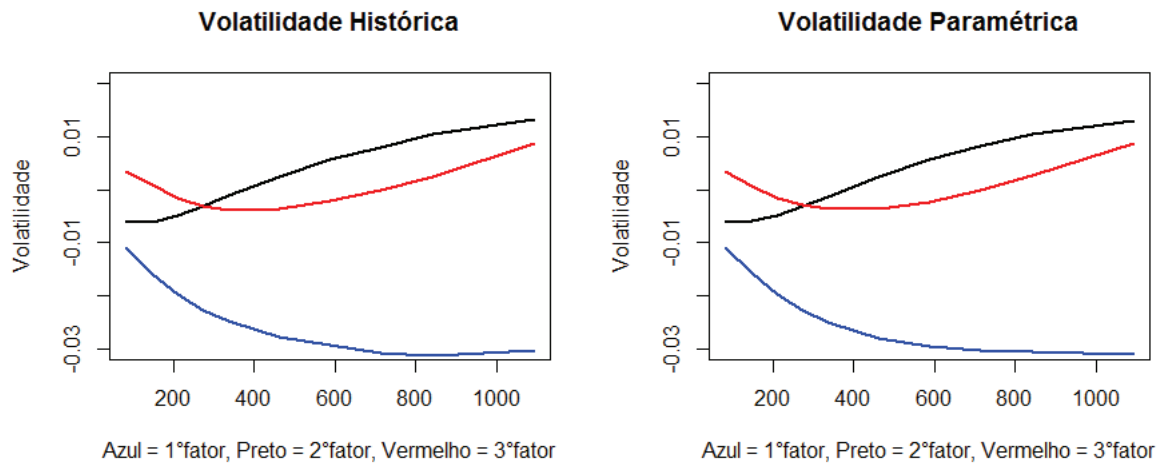


Figura 5.1: Volatilidade Histórica x Paramétrica

histórica. Para cada um dos fatores, a função de volatilidade calculada (paramétrica) apresenta a forma esperada, sendo o parâmetro  $\gamma_j < 0$  para cada  $j$ , o que garante que a volatilidade de longo prazo seja constante e, especialmente, não se degenere quando  $T \rightarrow \infty$ .

Na figura 5.1 é exibida a calibração da estrutura de volatilidade dos três primeiros fatores.

A partir da sobreposição dos gráficos da figura 5.1, se obtém:

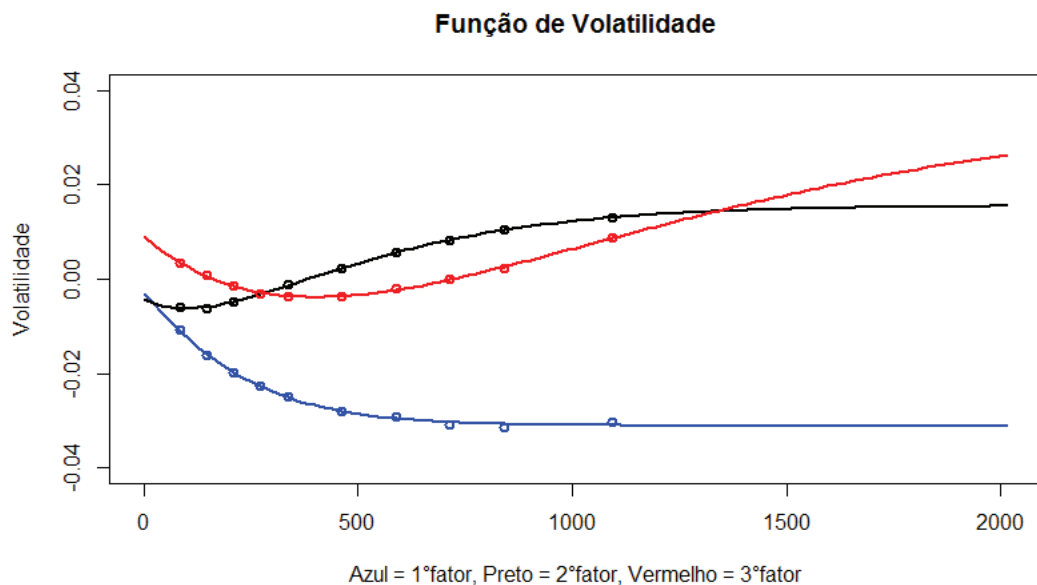


Figura 5.2: Estrutura de volatilidade dos três componentes principais. Os pontos representam os valores históricos (autovetor da matriz de correlação) e as linhas contínuas as funções calibradas

## 5.2 Aplicação do Modelo

Após a calibração do modelo, o método proposto foi aplicado em situações reais de mercado. Foram selecionados momentos de mudanças inesperadas na condução da política monetária, ou seja, aumento ou diminuição na taxa de juros mais rápido que o previsto pelo mercado ou em momentos que a curva de juros apresentou uma variação maior que dois desvios-padrões nos retornos do PU (preço unitário).

Para a definição dos cenários de estresse, pode-se utilizar valores históricos, projeções macroeconômicas, ou a experiência dos profissionais envolvidos. Porém, a grande questão é como determinar os demais pontos da curva. O método proposto permite que com apenas poucos pontos  $(T_1, choque_1)$ ,  $(T_2, choque_2)$  e  $(T_3, choque_3)$  se construa toda a curva.

Nos três primeiros exemplos tenta-se estressar os principais movimentos da ETTJ, isto é, variações extremas no nível, na inclinação e na curvatura. Para uniformizar os cenários de estresse, serão utilizados os cenários de estresse disponíveis na BM&F, mas vale reforçar que o método proposto permite a inclusão de informações independentes, como por exemplo de gestores de risco.

Vértice	Estresse Positivo	Estresse Negativo
1	80	-80
504	200	-175
1092	200	-175

Tabela 5.6: Estresse estabelecido para construir cenários de nível. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base. Cenários de Estresse da BM&FBOVESPA em agosto de 2013.

A figura 5.3 mostra a ETTJ construída a partir dos cenários estabelecidos na tabela 5.6.

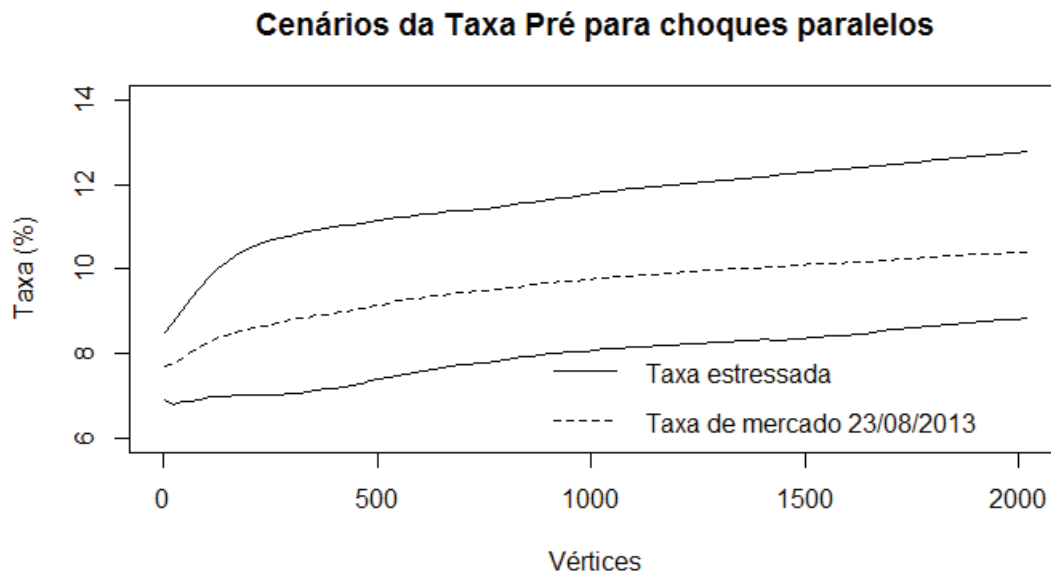


Figura 5.3: Cenários de estresse para 2 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 5.6



O segundo cenário de estresse construído replica os movimentos de inclinação da ETTJ. Desta forma, são utilizados os cenários de inclinação conforme a BM&FBOVESPA para os vértices curto e longo. O vértice intermediário foi escolhido de forma que a curva de mercado coincida com o cenário de estresse. A tabela 5.7 mostra os cenários utilizados.

Vértice	Estresse Positivo	Estresse Negativo
1	80	-80
252	0	0
882	200	-175

Tabela 5.7: Estresse estabelecido para construir cenários de inclinação. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base. Cenários de Estresse da BM&FBOVESPA em agosto de 2013.

A figura 5.4 mostra a ETTJ para mudanças na inclinação da curva, construída a partir dos cenários estabelecidos na tabela 5.7.

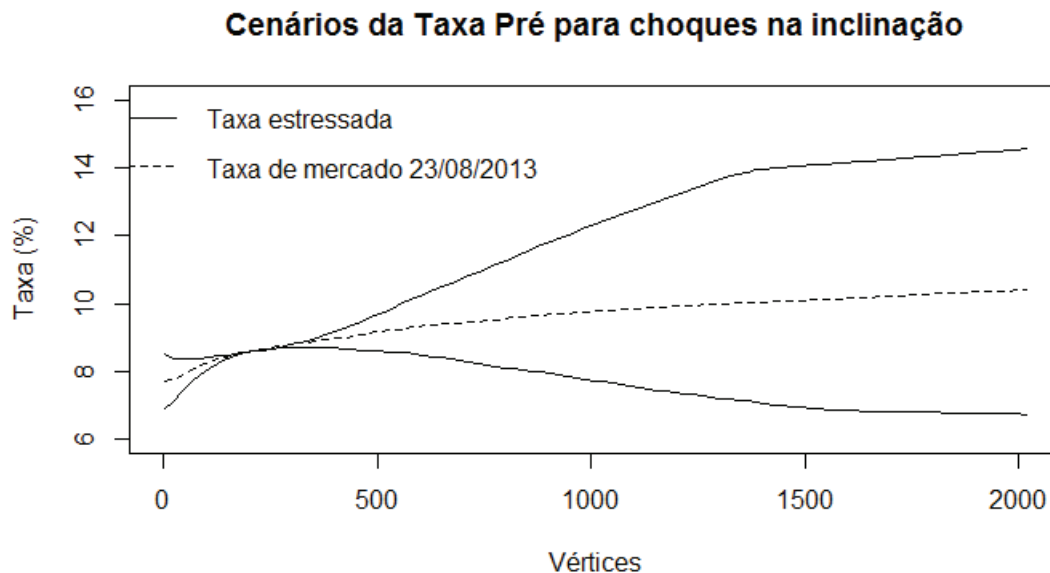


Figura 5.4: Cenários de estresse para 2 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 5.7

No terceiro cenário é feita a construção que contemple mudanças na curvatura da ETTJ. Novamente, os valores foram definidos conforme a BM&FBOVESPA para os vértices curto e no longo e, o vértice intermediário de tais cenários, com sinal invertido.

A figura 5.5 mostra a ETTJ para mudanças na curvatura da curva, construída a partir dos cenários estabelecidos na tabela 5.9.

Após a verificação do modelo para choques na estrutura da curva de juros, nível, inclinação e curvatura os próximos exemplos tentam observar a capacidade de replicar choques reais observados na estrutura a termo. As datas analisadas e os cenários definidos são apresentados na tabela 5.9.

No dia 29/05/2013, o Banco Central (BC) brasileiro surpreendeu o mercado ao acelerar o passo da alta de juros. O BC subiu o juros de 7,5%*a.a* para 8,0%*a.a* enquanto o mercado esperava alta de 0,25%. O exemplo tenta mostrar se no dia 28/05/2013, dois dias antes do evento,

Vértice	Estresse Postivo	Estresse Negativo
1	80	-80
525	-200	175
1092	175	-175

Tabela 5.8: Estresse estabelecido para construir cenários de curvatura. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base. Cenários de Estresse da BM&FBOVESPA em agosto de 2013.

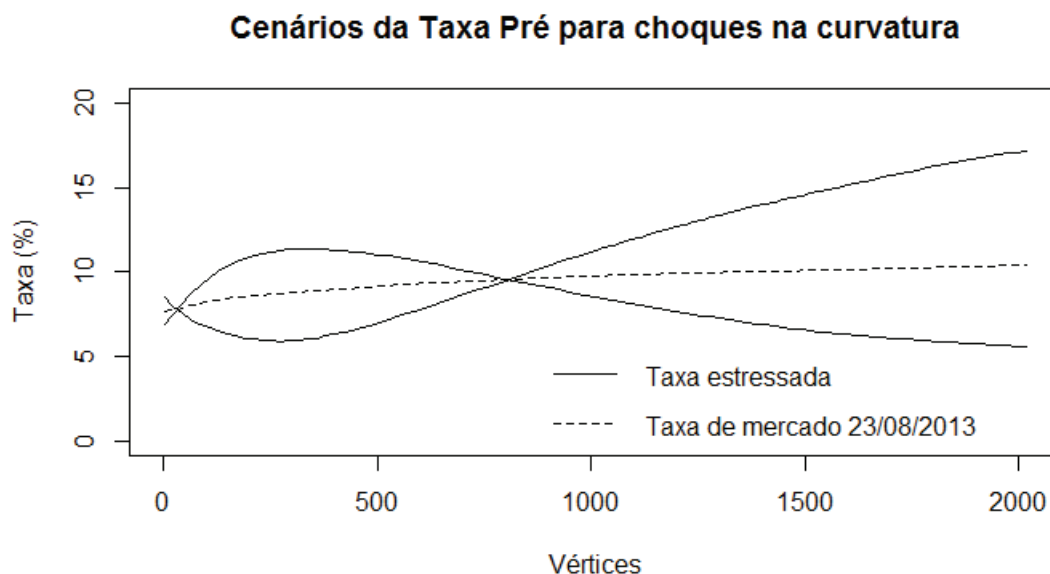


Figura 5.5: Cenários de estresse para 2 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 5.8

Data	Vértice	Estresse	<i> Holding Period</i>
28/05/2013	1	50	2
	252	50	
	840	30	
13/08/2007	1	0	3
	357	100	
	861	150	

Tabela 5.9: Estresse estabelecido para construção dos cenários. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base.

vale lembrar que na hora da reunião do BC os mercados estavam fechados, um profissional de risco conseguiria simular um cenário de estresse para a curva de juros. A figura 5.6 mostra que o modelo responde satisfatoriamente.

O segundo exemplo mostra a resposta do modelo a choques gerado na crise de 2008. No dia 16/08/2007, empresas do setor imobiliário americano começaram a pedir concordata.<sup>1</sup> O

<sup>1</sup><http://www1.folha.uol.com.br/folha/dinheiro/ult91u320637.shtml>

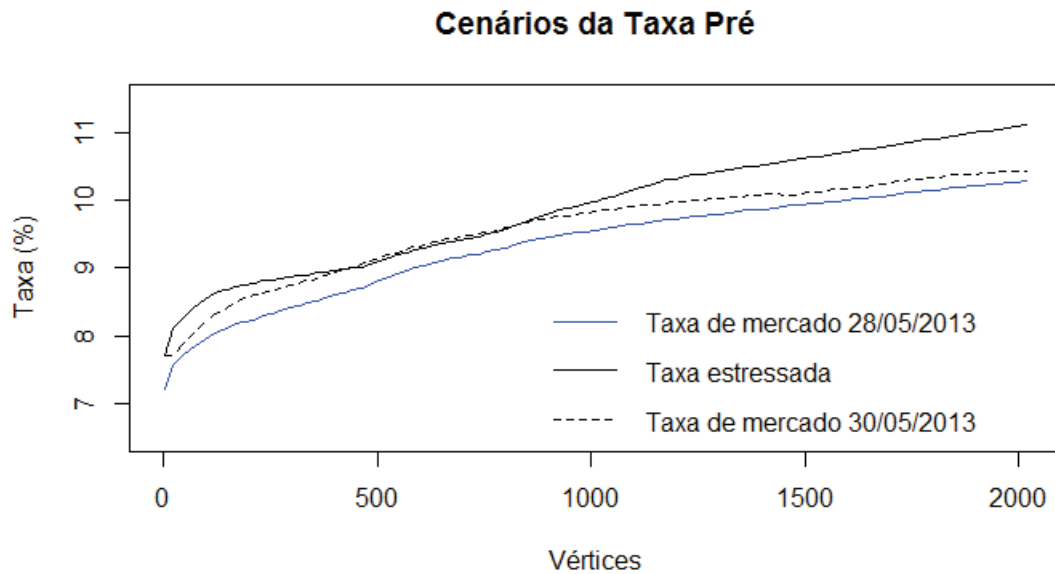


Figura 5.6: Cenários de estresse para 2 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 5.9

exemplo tenta mostrar se no dia 13/08/2007, três dias antes do evento, um profissional de risco conseguiria simular um cenário de estresse para a curva de juros. A figura 5.7 mostra que o modelo também responde satisfatoriamente.

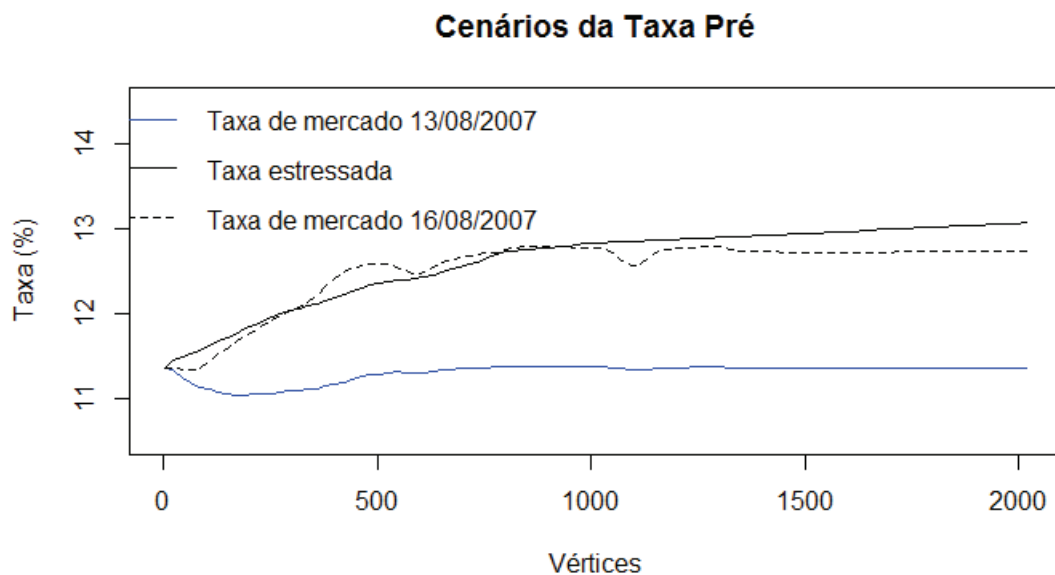


Figura 5.7: Cenários de estresse para 3 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 5.9

Para testar a sensibilidade do modelo a experiência do profissional envolvido na construção dos cenários de estresse bem como a interface entre mudanças no cenário e a resposta gerada pelo modelo, o cenário do exemplo anterior foi alterado. O cenário agora utilizado está representado

Data	Vértice	Estresse	<i> Holding Period</i>
13/08/2007	1	0	3
	357	150	
	861	150	

Tabela 5.10: Estresse estabelecido para construção dos cenários alternativos. Os vértices são expressos em dias úteis e o estresse em pontos base.

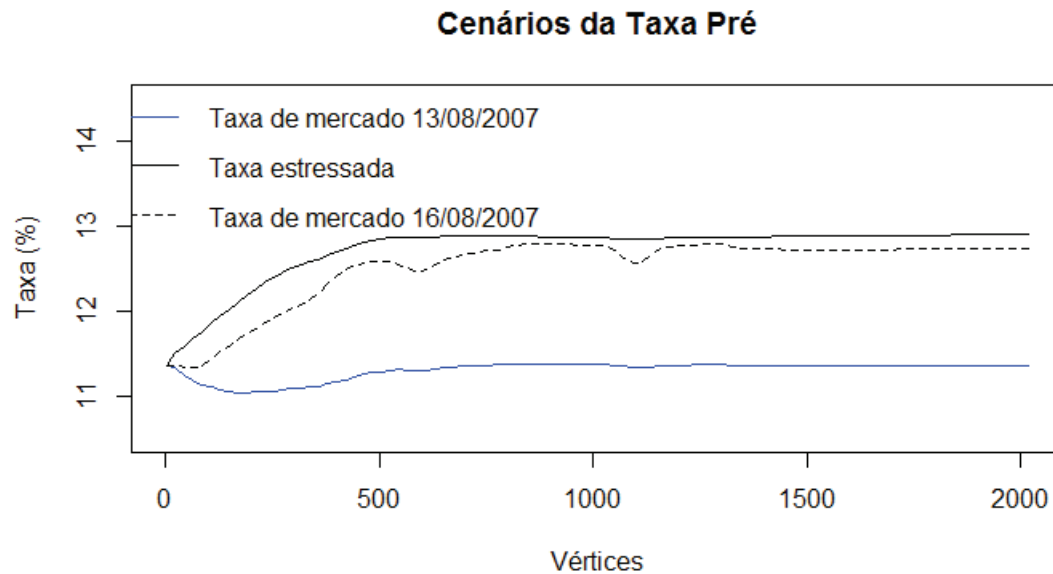


Figura 5.8: Cenários de estresse para 3 dias da taxa de juros segundo o modelo HJM e a tabela 5.10

na tabela 5.10.

Se observa no gráfico 5.8 o quanto a sensibilidade do profissional de risco envolvido na construção dos cenários é importante e como o modelo responde a variações nos cenários gerados. Sendo assim, o modelo se mostra eficaz em fazer a ligação entre a experiência do profissional envolvido e a modelagem matemática.

# Capítulo 6

## Considerações Finais

Avaliar a capacidade das instituições financeiras em suportar situações extremas sem comprometer a estabilidade do sistema financeiro se tornou obrigatório a partir de 2009, quando os bancos centrais, sejam eles internacionais ou nacional passaram a fiscalizar mais fortemente os participantes de mercado. A metodologia utilizada por eles para mensurar o quanto as instituições estavam expostas ao risco de evento foi a utilização do teste de estresse. A ferramenta que até aquele momento era restrita a poucas instituições passou a ser utilizada por grande parte do sistema financeiro.

O objetivo do trabalho é construir cenários de estresse para a Estrutura a Termo da Taxa de Juros, que consiga incorporar a modelagem matemática, através do modelo de Heath-Jarrow-Morton, com a opinião de especialistas de risco de mercado de forma a complementar o estudo feito por [Dario and Fernández(2011)]. A utilização do HJM é justificada por ser um modelo livre de arbitragem e modelar a dinâmica da taxas de juros em um contexto multifatores. O propósito não foi comparar o modelo HJM com outros modelos, como por exemplo, o modelo de Nelson-Siegel-Svensson, pois o mesmo já foi feito em outros trabalhos como no próprio [Dario and Fernández(2011)] onde o HJM se mostrou superior.

O modelo se mostrou capaz de replicar as oscilações na curva de juros em situações reais de estresse no mercado, como por exemplo, em momentos de mudanças não esperada na condução da política monetária pelo Banco Central e na crise imobiliária americana.

A principal contribuição do trabalho é mostrar de forma empírica que se pode utilizar a Análise de Componentes Principais (ACP) no mercado de juros brasileiro em períodos de crise, visto que não era claro o poder de explicação dos três primeiros componentes principais em momentos de grande volatilidade no mercado de juros brasileiro. Conforme abordado, a utilização das três primeiras componentes se mostrou relevante uma vez que mesmo em momentos de perda de explicação por parte da primeira componente principal a explicação total da variância dos dados originais era mantida sempre superior a 95%, pois a ordem de explicação das outras componentes aumentava. Tal fato, se torna ainda mais claro quando se escolhe apenas os vértices mais negociados da curva de juros, porque o efeito interpolação é reduzido quando se utiliza apenas os vértices mais líquidos. A ACP com esses vértices fez a ordem de explicação da variância dos dados originais se manter sempre superior a 98%, o que valida ainda mais o estudo realizado.

Como desenvolvimento futuro deste trabalho, a aplicação do modelo proposto para uma carteira de ativos indexados ao DI-futuro e análise das oscilações apresentadas em momentos de estresse.

# Apêndice A

## Resultados Técnicos e Notações

### A.1 Considerações para a construção dos cenários

Na construção dos cenários observa-se que, pela independência dos três fatores e das volatilidades correspondentes, espera-se que o sistema linear da Equação (4.5.2) possua uma única solução, isto é,

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \sigma^1(T_1) & \sigma^2(T_1) & \sigma^3(T_1) \\ \sigma^1(T_2) & \sigma^2(T_2) & \sigma^3(T_2) \\ \sigma^1(T_3) & \sigma^2(T_3) & \sigma^3(T_3) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (\text{A.1.1})$$

onde  $\det(A)$  denota o determinante da matriz  $A$ . No entanto, caso  $\det(A) = 0$  propõe-se aplicar o seguinte "ajuste numérico" na matriz  $A$ .

- Se  $\sigma^1(T_2)\sigma^2(T_3) \neq \sigma^2(T_2)\sigma^1(T_3)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \sigma^1(T_1) & \sigma^2(T_1) & \sigma^3(T_1) + \epsilon \\ \sigma^1(T_2) & \sigma^2(T_2) & \sigma^3(T_2) \\ \sigma^1(T_3) & \sigma^2(T_3) & \sigma^3(T_3) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.2})$$

- Se  $\sigma^1(T_2)\sigma^2(T_3) = \sigma^2(T_2)\sigma^1(T_3)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \sigma^1(T_1) & \sigma^2(T_1) & \sigma^3(T_1) + \epsilon \\ \sigma^1(T_2) & \sigma^2(T_2) & \sigma^3(T_2) \\ \sigma^1(T_3) & \sigma^2(T_3) + \frac{\epsilon}{2} & \sigma^3(T_3) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

sendo  $\epsilon$  um número positivo pequeno, como por exemplo  $\epsilon = 10^{-10}$ . O ajuste proposto resolve o problema do sistema não ter solução única sem mudanças significativas na estrutura de volatilidade que determina os choques  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ .

### A.2 Determinação do nível de confiança do choque

Como subproduto da relação entre as Equações (4.5.1) e (4.4.21) pode-se obter o nível de confiança do choque dado num vértice  $T_i$ , mais especificamente, pode ser calculado o valor da probabilidade:

$$\mathbb{P}(r_{0+HP}(T_i) - r_0(T_i) \leq \text{choque}_i). \quad (\text{A.2.1})$$

Como  $\sqrt{\frac{HP}{252}}(\sigma^1(T_i)\xi_1 + \sigma^2(T_i)\xi_2 + \sigma^3(T_i)\xi_3)$  possui distribuição gaussiana com média zero e variância  $\frac{HP}{252}(\sigma^1(T_i)^2 + \sigma^2(T_i)^2 + \sigma^3(T_i)^2)$  e como

$$\mathbb{P}(r_{0+HP}(T_i) - r_0(T_i) \leq choque_i) = \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{HP}{252}}(\sigma^1(T_i)\xi_1 + \sigma^2(T_i)\xi_2 + \sigma^3(T_i)\xi_3) \leq choque_i - \frac{HP}{252}\mu(T_i)\right) \quad (\text{A.2.2})$$

a probabilidade pode ser facilmente calculada. Ou seja, pode ser determinado o nível de confiança do choque dado no vértice  $T_i$ .

## A.3 Script Geral

Para a aplicação do modelo proposto foram gerados programas na linguagem R. Detalhes sobre a linguagem de programação em [Tsay(2010)].

```
# Dissertacao de mestrado Romeu Dellazeri Pixiolini

# Direcionando para pasta correta
setwd("C:/Users/Romeu/Desktop/Impa/Projeto Final/Term Structure/modelagem")

# Carregar pacotes
library(tseries)
library(zoo)

# Carregando os dados no R Base inteira

load("vertices_escolhidos2.RData")
colnames(vertices_escolhidos2) = c("data",84, 147, 210, 273, 336, 462, 588, 714, 840, 1092)

dados <- vertices_escolhidos2

vertices = as.matrix(c(84, 147, 210, 273, 336, 462, 588, 714, 840, 1092))
n_vertices = length(vertices)

load("BaseDI.RData")
colnames(base) = c("data",1, 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189, 210, 231, 252, 273, 294, 315,
336, 357, 378, 399, 420, 441, 462, 483, 504, 525, 546, 567, 588, 609, 630, 651, 672, 693, 714,
735, 756, 777, 798, 819, 840, 861, 882, 903, 924, 945, 966, 987, 1008, 1029, 1050, 1071, 1092,
1113, 1134, 1155, 1176, 1197, 1218, 1239, 1260, 1281, 1302, 1323, 1344, 1365, 1386, 1407, 1428, 1449,
1470, 1491, 1512, 1533, 1554, 1575, 1596, 1617, 1638, 1659, 1680, 1701, 1722, 1743, 1764, 1785, 1806,
1827, 1848, 1869, 1890, 1911, 1932, 1953, 1974, 1995, 2016)

basevertices = as.matrix(c(1, 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189, 210, 231, 252, 273, 294, 315,
336, 357, 378, 399, 420, 441, 462, 483, 504, 525, 546, 567, 588, 609, 630, 651, 672, 693, 714,
735, 756, 777, 798, 819, 840, 861, 882, 903, 924, 945, 966, 987, 1008, 1029, 1050, 1071, 1092,
1113, 1134, 1155, 1176, 1197, 1218, 1239, 1260, 1281, 1302, 1323, 1344, 1365, 1386, 1407, 1428, 1449,
1470, 1491, 1512, 1533, 1554, 1575, 1596, 1617, 1638, 1659, 1680, 1701, 1722, 1743, 1764, 1785, 1806,
1827, 1848, 1869, 1890, 1911, 1932, 1953, 1974, 1995, 2016))
n_verticesbase = length(basevertices)

# pega todas as datas
dias = as.matrix(dados[, 1])

# somente as taxas x vertices
dados2 = as.matrix(dados[,2:11])
```

```

# Invariantes de Mercado Calibracao feita ate o dia 28_06_13
invariantes <- diff(dados2)

teste = dias[2603,1]

invariantes = invariantes[1:2603,]

# Calcula a matriz de correlacao dos invariantes
correlacao = cor(invariantes)

# Calcula a matriz de autovalores da matriz de correlacao dos invariantes
autovalores = as.matrix(eigen(correlacao)$values)
autovetores2 = as.matrix(eigen(correlacao)$vectors)[,1:3]

# Coloca os autovalores em ordem decrescente
lambda = as.matrix(sort(autovalores,decreasing = TRUE))

# Calcula a variancia e o desvio padrao amostral de cada vertice
sigma = as.matrix(apply(invariantes, 2, sd))

# Fazendo o PCA com os invariantes/sigma
scale = as.matrix(apply(invariantes,2, function(y) ((y-mean(y))/sd(y))))

pca <- princomp(scale,scores=TRUE)

#analizando os pca's
summary(pca)
plot(pca)

autovetores = as.matrix(pca$loading[,1:3])

# Calculo do sigma estimado pelas amostras (formula 12 do paper)
sigma_est = matrix(numeric(0), nrow = n_vertices, ncol = 3)
for (j in 1:3){
  for (i in 1 : n_vertices){
    sigma_est[i,j] = sqrt(lambda[j,1]/(1/252))*autovetores2[i,j]*sigma[i,1]
  }
}
colnames(sigma_est) = c('Sigma_Hist1','Sigma_Hist2','Sigma_Hist3')
sigma_est2=as.zoo(sigma_est,order.by=vertices)
plot(sigma_est2, type="l")

# Definindo os parametros de entrada

alfa_ini = as.matrix(c(3.15,0,0.4))
beta_ini = as.matrix(c(2,-1,2))
gama_ini = as.matrix(c(-1.07,-1,-0.5))
delta_ini = as.matrix(c(-3.25,-1,-1))

alfa = as.matrix(c(0,0,0))
beta = as.matrix(c(0,0,0))
gama = as.matrix(c(0,0,0))
delta = as.matrix(c(0,0,0))

# Aplicando o argmin e encontrando os parametros de otimizacao

j = 1
parametrizacao = nls(sigma_est[,j] ~ (alfa + beta*(vertices/252)) * exp(gama*(vertices/252)) + delta, start

```



```

= list(alfa=alfa_ini[j], beta=beta_ini[j], gama=gama_ini[j], delta=delta_ini[j]), control=list(tol=10^-3,
maxiter=100000, minFactor=10^-10, warnOnly=T), trace=T)
summary(parametrizacao)

summary_parametrizacao = stats::summary.nls(parametrizacao)
param = summary_parametrizacao$parameters[1]
alfa[j] = param[1]
beta[j] = param[2]
gama[j] = param[3]
delta[j] = param[4]

# R^2 da regressao nao linear
R2_1 = 1 - (deviance(parametrizacao) / sum((sigma_est[,1] - mean(sigma_est[,1]))^2))

j = 2
parametrizacao = nls(sigma_est[,j] ~ (alfa + beta*(vertices/252)) * exp(gama*(vertices/252)) + delta, start=
list(alfa=alfa_ini[j], beta=beta_ini[j], gama=gama_ini[j], delta=delta_ini[j]), control=list(tol=10^-4,
maxiter=10000, minFactor=10^-10, warnOnly=T), trace=T)
summary(parametrizacao)

summary_parametrizacao = stats::summary.nls(parametrizacao)
param = summary_parametrizacao$parameters[1]
alfa[j] = param[1]
beta[j] = param[2]
gama[j] = param[3]
delta[j] = param[4]

# R^2 da regressao nao linear
R2_2 = 1 - (deviance(parametrizacao) / sum((sigma_est[,2] - mean(sigma_est[,2]))^2))

j = 3
parametrizacao = nls(sigma_est[,j] ~ (alfa + beta*(vertices/252)) * exp(gama*(vertices/252)) + delta, start=
list(alfa=alfa_ini[j], beta=beta_ini[j], gama=gama_ini[j], delta=delta_ini[j]), control=list(tol=10^-4,
maxiter=100000, minFactor=10^-10, warnOnly=T), trace=T)
summary(parametrizacao)

summary_parametrizacao = stats::summary.nls(parametrizacao)
param = summary_parametrizacao$parameters[1]
alfa[j] = param[1]
beta[j] = param[2]
gama[j] = param[3]
delta[j] = param[4]

# R^2 da regressao nao linear
R2_3 = 1 - (deviance(parametrizacao) / sum((sigma_est[,3] - mean(sigma_est[,3]))^2))

parametros = cbind(alfa, beta, gama, delta)
colnames(parametros) = c('alfa', 'beta', 'gama', 'delta')

# Calculo do sigma parametrico (formula 13 do paper)
sigma_param_calc = function(vertices, par){
s = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=1)
alfa = par[1]
beta = par[2]
gama = par[3]
delta = par[4]

for(i in vertices){

```

```

    tau = i
    s = rbind(s, (alfa + beta*(tau/252)) * exp(gama*(tau/252)) + delta)
  }
  return(s)
}

sigma_param = cbind(sigma_param_calc(vertices, parametros[1,]),
                    sigma_param_calc(vertices, parametros[2,]),
                    sigma_param_calc(vertices, parametros[3,]))
colnames (sigma_param) = c('Sigma_Param1','Sigma_Param2','Sigma_Param3')

# plot comparando fatores principais obtidos para sigmas estimados e do modelo parametrico
sigma_est2=as.zoo(sigma_est,order.by=vertices)
sigma_param2=as.zoo(sigma_param,order.by=vertices)
plot(sigma_est2, type="l", main="Sigma Historico")
plot(sigma_param2, type="l", main="Sigma Parametrico")
plot(cbind(sigma_est2,sigma_param2), type="l", main="Sigmas Historico x Parametrico")

# Calculo do sigma parametrico (formula 13 do paper)
sigma_param_calc = function (basevertices, par){
  s = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=1)
  alfa = par[1]
  beta = par[2]
  gama = par[3]
  delta = par[4]

  for(i in basevertices){
    tau = i
    s = rbind(s, (alfa + beta*(tau/252)) * exp(gama*(tau/252)) + delta)
  }
  return(s)
}

sigma_param = cbind(sigma_param_calc(basevertices, parametros[1,]),
                    sigma_param_calc(basevertices, parametros[2,]),
                    sigma_param_calc(basevertices, parametros[3,]))
colnames (sigma_param) = c('Sigma_Param1','Sigma_Param2','Sigma_Param3')

# calculo da media do modelo parametrico (eq 13)
mu_param_calc = function (basevertices, param){
  m_ = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=1)

  for(i in 1:n_verticesbase){
    tau = basevertices[i]
    m__ = 0
    for(j in c(1,2,3)){
      alpha = param[j,1]
      beta = param[j,2]
      gamma = param[j,3]
      delta = param[j,4]

      m__ = m__ + sigma_param[i,j]*(delta*(tau/252)) + (beta/gamma)*(tau/252)*exp(gamma*(tau/252))
    }
    m_ = rbind(m_,m__)
  }
  return(m_)
}

```

```

}
mu_param = mu_param_calc(basevertices, parametros)
mu_param = zoo(mu_param, order.by=basevertices)

base2 = as.matrix(base[,2:98])

# Previsao de uma tx especifica, apos HP dias (Eq 17)

T_ = 84
t0 = 1
r0 = base2[t0, which(basevertices==T_)]
HP = 2
ksi = rnorm(3,mean=0,sd=1)
#ksi = c(0.3262126, 1.2685236, -0.8200862)
r0_HP = r0 + HP/252*as.numeric(mu_param[which(basevertices==T_)]) + sqrt(HP/252)*(sigma_param[
  which(basevertices==T_),1:3] %*% ksi)
r0_HP_amostra = base2[t0+HP, which(basevertices==T_)]

# Simulando Choques paralelos reais na curva de juros

# calculo do ksi baseado em choques determinados
T_stress = c(1, 504, 1092)
choque_up = c(80, 200, 200)/100 # choques positivos
choque_down = c(-80, -175, -175)/100 # choques negativos

# pega a media
mu_stress = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=1)
for(t in T_stress){
  mu_stress = rbind(mu_stress, mu_param[which(basevertices == t),])
}

# pega a vol
sigma_stress = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=3)
for(t in T_stress){
  sigma_stress = rbind(sigma_stress, sigma_param[which(basevertices == t),])
}

# calculo dos ks is positivo e negativo resolvendo sistema da eq 18
HP_stress = 2
ksi_up = solve(sqrt(HP_stress/252)*sigma_stress, choque_up - (HP_stress/252)*mu_stress)
ksi_down = solve(sqrt(HP_stress/252)*sigma_stress, choque_down - (HP_stress/252)*mu_stress)

# curva estressada das taxas
# pega todas as datas
dias = as.matrix(base[, 1])

date_0_stress = "31/05/2013"
t0_stress = which(dias==date_0_stress)
HP_stress = 2

# pega a taxa do dia
r0_stress = as.numeric(base2[t0_stress,])

# pega a taxa do dia no evento do stress
r0_HP_stress = as.matrix(base2[t0_stress+HP_stress,])

# calculo das taxas estressadas
rates_stress_up = r0_stress + HP_stress/252*as.numeric(mu_param) + sqrt(HP_stress/252)*(sigma_

```

```

    param[,1:3] %*% ksi_up)
rates_stress_up = zoo(rates_stress_up, order.by=basevertices)
rates_stress_down = r0_stress + HP_stress/252*as.numeric(mu_param) + sqrt(HP_stress/252)*(sigma_
    param[,1:3] %*% ksi_down)
rates_stress_down = zoo(rates_stress_down, order.by=basevertices)
rates_stress = cbind(rates_stress_down, rates_stress_up)

# plot das taxas estressadas (com choque positivo e negativo) e observada
plot(rates_stress_up, main="Cenários da Taxa Pre", ylab="taxas", xlab="maturidades", type="l", col="
    blue", ylim=range(rates_stress_up, rates_stress_down))
lines(rates_stress_down, type="l", col="red")
r0_HP_stress = zoo(r0_HP_stress, order.by=basevertices)
lines(r0_HP_stress, type="l", col="green")
legend("bottomright", c("Taxa estressada", "Taxa estressada", "Taxa de mercado 04/06/2013"), col = c("
    blue", "red", "green"), lty = c(1, 1, 2), inset = -.05, bty = "n")

# Simulacao real de choques na inclinacao da curva de juros

# calculo do ksi baseado em choques determinados

T_stress = c(1, 252, 882)
choque_up = c(80, 0, 200)/100 # choques positivos
choque_down = c(-80, 0, -175)/100 # choques negativos

# pega a media
mu_stress = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=1)
for(t in T_stress){
    mu_stress = rbind(mu_stress, mu_param[which(basevertices == t),])
}

# pega a vol
sigma_stress = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=3)
for(t in T_stress){
    sigma_stress = rbind(sigma_stress, sigma_param[which(basevertices == t),])
}

# calculo dos ksIs positivo e negativo resolvendo sistema da eq 18
HP_stress = 2
ksi_up = solve(sqrt(HP_stress/252)*sigma_stress, choque_up - (HP_stress/252)*mu_stress)
ksi_down = solve(sqrt(HP_stress/252)*sigma_stress, choque_down - (HP_stress/252)*mu_stress)

# curva estressada das taxas
# pega todas as datas
dias = as.matrix(base[, 1])

date_0_stress = "31/05/2013"
t0_stress = which(dias==date_0_stress)
HP_stress = 2

# pega a taxa do dia
r0_stress = as.numeric(base2[t0_stress,])

# pega a taxa do dia no evento do stress
r0_HP_stress = as.matrix(base2[t0_stress+HP_stress,])

# calculo das taxas estressadas
rates_stress_up = r0_stress + HP_stress/252*as.numeric(mu_param) + sqrt(HP_stress/252)*(sigma_
    param[,1:3] %*% ksi_up)

```

```

rates_stress_up = zoo(rates_stress_up, order.by=basevertices)
rates_stress_down = r0_stress + HP_stress/252*as.numeric(mu_param) + sqrt(HP_stress/252)*(sigma_
  param[,1:3] %*% ksi_down)
rates_stress_down = zoo(rates_stress_down, order.by=basevertices)
rates_stress = cbind(rates_stress_down, rates_stress_up)

# plot das taxas estressadas (com choque positivo e negativo) e observada
plot(rates_stress_up, main="Cenários da Taxa Pre", ylab="taxas", xlab="maturidades", type="l", col="
  blue", ylim=range(rates_stress_up, rates_stress_down))
lines(rates_stress_down, type="l", col="red")
r0_HP_stress = zoo(r0_HP_stress, order.by=basevertices)
lines(r0_HP_stress, type="l", col="green")
legend("bottomright", c("Taxa estressada", "Taxa de mercado 04/06/2013", "Taxa estressada"), col = c("
  blue", "black", "green"), lty = c(1, 1, 2), inset = -.05, bty = "n")

# Exemplo real de choques na curvatura da taxa de juros
# calculo do ksi baseado em choques determinados

T_stress = c(1, 525, 1092)
choque_up = c(80, -200, 200)/100 # choques positivos
choque_down = c(-80, 175, -175)/100 # choques negativos

# pega a media
mu_stress = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=1)
for(t in T_stress){
  mu_stress = rbind(mu_stress, mu_param[which(basevertices == t),])
}

# pega a vol
sigma_stress = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=3)
for(t in T_stress){
  sigma_stress = rbind(sigma_stress, sigma_param[which(basevertices == t),])
}

# calculo dos ksIs positivo e negativo resolvendo sistema da eq 18
HP_stress = 2
ksi_up = solve(sqrt(HP_stress/252)*sigma_stress, choque_up - (HP_stress/252)*mu_stress)
ksi_down = solve(sqrt(HP_stress/252)*sigma_stress, choque_down - (HP_stress/252)*mu_stress)

# curva estressada das taxas
# pega todas as datas
dias = as.matrix(base[, 1])

date_0_stress = "31/05/2013"
t0_stress = which(dias==date_0_stress)
HP_stress = 2

# pega a taxa do dia
r0_stress = as.numeric(base2[t0_stress,])

# pega a taxa do dia no evento do stress
r0_HP_stress = as.matrix(base2[t0_stress+HP_stress,])

# calculo das taxas estressadas
rates_stress_up = r0_stress + HP_stress/252*as.numeric(mu_param) + sqrt(HP_stress/252)*(sigma_
  param[,1:3] %*% ksi_up)
rates_stress_up = zoo(rates_stress_up, order.by=basevertices)
rates_stress_down = r0_stress + HP_stress/252*as.numeric(mu_param) + sqrt(HP_stress/252)*(sigma_

```

```

    param[,1:3] %*% ksi_down)
rates_stress_down = zoo(rates_stress_down, order.by=basevertices)
rates_stress = cbind(rates_stress_down, rates_stress_up)

# plot das taxas estressadas (com choque positivo e negativo) e observada
# (comparar com fig 5)
plot(rates_stress_up, main="Cenários da Taxa Pre", ylab="taxas", xlab="maturidades", type="l", col="
    blue", ylim=range(rates_stress_up, rates_stress_down))
lines(rates_stress_down, type="l", col="red")
r0_HP_stress = zoo(r0_HP_stress, order.by=basevertices)
lines(r0_HP_stress, type="l", col="green")
legend("bottomright", c("Taxa estressada", "Taxa de mercado 04/06/2013", "Taxa estressada"), col = c("
    blue", "black", "green"), lty = c(1, 1, 2), inset = -.05, bty = "n")

# Aplicacao Real do modelo em dias de grande volatilidade nos mercados (maior que 2 desvios)
# Simulando em um dia pos Copom 29_8_13 – Brasil passa a ter o maior juro real do mundo

# calculo do ksi baseado em choques determinados

T_stress = c(1, 252, 840)
choque_up = c(0, 20, 50)/100 # choques positivos
#choque_up = c(80, 100, 140)/100 # choques positivos bm&f

# pega a media
mu_stress = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=1)
for(t in T_stress){
    mu_stress = rbind(mu_stress, mu_param[which(basevertices == t),])
}

# pega a vol
sigma_stress = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=3)
for(t in T_stress){
    sigma_stress = rbind(sigma_stress, sigma_param[which(basevertices == t),])
}

# calculo dos ks is positivo e negativo resolvendo sistema da eq 18
HP_stress = 2
ksi_up = solve(sqrt(HP_stress/252)*sigma_stress, choque_up - (HP_stress/252)*mu_stress)

# curva estressada das taxas
# pega todas as datas
dias = as.matrix(base[, 1])

date_0_stress = "27/08/2013"
t0_stress = which(dias==date_0_stress)
HP_stress = 2

# pega a taxa do dia
r0_stress = as.matrix(base2[t0_stress,])

# pega a taxa do dia no evento do stress
r0_HP_stress = as.matrix(base2[t0_stress+HP_stress,])

# calculo das taxas estressadas
rates_stress_up = r0_stress + HP_stress/252*as.numeric(mu_param) + sqrt(HP_stress/252)*(sigma_
    param[,1:3] %*% ksi_up)
rates_stress_up = zoo(rates_stress_up, order.by=basevertices)

```

```

r0_stress = zoo(r0_stress, order.by=basevertices)
r0_HP_stress = zoo(r0_HP_stress, order.by=basevertices)

rates_stress = cbind(r0_stress, rates_stress_up)
plot(rates_stress_up, main="Cenários da Taxa Pre", ylab="taxas", xlab="maturidades", type="l", col="
  blue", ylim=range(rates_stress_up, r0_stress))
lines(r0_stress, type="l", col="black")
r0_HP_stress = zoo(r0_HP_stress, order.by=basevertices)
lines(r0_HP_stress, type="l", col="green", lty = 2)
legend("bottomright", c("Taxa estressada", "Taxa de mercado 27/08/2013", "Taxa de mercado 29/08/2013"),
  col = c("blue", "black", "green"), lty = c(1, 1, 2), inset = -.05, bty = "n")

# Aplicacao Real do modelo em dias de grande volatilidade nos mercados (maior que 2 desvios)
# Estressando a curva para o dia 31_05_13. no dia anterior o BC acelerou o passo
# calculo do ksi baseado em choques determinados

T_stress = c(1, 252, 840)
choque_up = c(50, 50, 30)/100 # choques positivos
#choque_up = c(80, 200, 175)/100 # choques positivos bm&f 31_05_13

# pega a media
mu_stress = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=1)
for(t in T_stress){
  mu_stress = rbind(mu_stress, mu_param[which(basevertices == t),])
}

# pega a vol
sigma_stress = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=3)
for(t in T_stress){
  sigma_stress = rbind(sigma_stress, sigma_param[which(basevertices == t),])
}

# calculo dos ksIs positivo e negativo resolvendo sistema da eq 18
HP_stress = 2
ksi_up = solve(sqrt(HP_stress/252)*sigma_stress, choque_up - (HP_stress/252)*mu_stress)

# curva estressada das taxas
# pega todas as datas
dias = as.matrix(base[, 1])

date_0_stress = "28/05/2013"
t0_stress = which(dias==date_0_stress)
HP_stress = 2

# pega a taxa do dia
r0_stress = as.matrix(base2[t0_stress,])

# pega a taxa do dia no evento do stress
r0_HP_stress = as.matrix(base2[t0_stress+HP_stress,])

# calculo das taxas estressadas
rates_stress_up = r0_stress + HP_stress/252*as.numeric(mu_param) + sqrt(HP_stress/252)*(sigma_
  param[,1:3] %*% ksi_up)
rates_stress_up = zoo(rates_stress_up, order.by=basevertices)
r0_stress = zoo(r0_stress, order.by=basevertices)
r0_HP_stress = zoo(r0_HP_stress, order.by=basevertices)

```

```

rates_stress = cbind(r0_stress,rates_stress_up)
plot(rates_stress_up, main="Cenários da Taxa Pre", ylab="taxas", xlab="maturidades", type="l", col="
  blue", ylim=range(rates_stress_up, r0_stress))
lines(r0_stress, type="l", col="black")
r0_HP_stress = zoo(r0_HP_stress, order.by=basevertices)
lines(r0_HP_stress, type="l", col="green", lty = 2)
legend("bottomright", c("Taxa estressada", "Taxa de mercado 28/05/2013", "Taxa de mercado 31/05/2013"),
  col = c("blue", "black", "green"), lty = c(1, 1, 2), inset = -.05, bty = "n")

# Aplicacao Real do modelo em dias de grande volatilidade nos mercados (maior que 2 desvios)
# Estressando a curva para o dia 13_08_2007 (crise imobiliaria americana, empresas do setor comecam a
  pedir concordata)
# link para a noticia da folha http://www1.folha.uol.com.br/folha/dinheiro/ult91u320637.shtml
# calculo do ksi baseado em choques determinados

T_stress = c(1, 357, 861)
choque_up = c(0, 150, 150)/100 # choques positivos
#choque_up = c(100, 300, 320)/100 # choques positivos bm&f

# pega a media
mu_stress = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=1)
for(t in T_stress){
  mu_stress = rbind(mu_stress, mu_param[which(basevertices == t),])
}

# pega a vol
sigma_stress = matrix(numeric(0), nrow=0, ncol=3)
for(t in T_stress){
  sigma_stress = rbind(sigma_stress, sigma_param[which(basevertices == t),])
}

# calculo dos ksIs positivo e negativo resolvendo sistema da eq 18
HP_stress = 3
ksi_up = solve(sqrt(HP_stress/252)*sigma_stress, choque_up - (HP_stress/252)*mu_stress)

# curva estressada das taxas
# pega todas as datas
dias = as.matrix(base[, 1])

date_0_stress = "13/08/2007"
t0_stress = which(dias==date_0_stress)
HP_stress = 3

# pega a taxa do dia
r0_stress = as.matrix(base2[t0_stress,])

# pega a taxa do dia no evento do stress
r0_HP_stress = as.matrix(base2[t0_stress+HP_stress,])

# calculo das taxas estressadas
rates_stress_up = r0_stress + HP_stress/252*as.numeric(mu_param) + sqrt(HP_stress/252)*(sigma_
  param[,1:3] %*% ksi_up)
rates_stress_up = zoo(rates_stress_up, order.by=basevertices)
r0_stress = zoo(r0_stress, order.by=basevertices)
r0_HP_stress = zoo(r0_HP_stress, order.by=basevertices)

rates_stress = cbind(r0_stress,rates_stress_up)
plot(rates_stress_up, main="Cenários da Taxa Pre", ylab="taxas", xlab="maturidades", type="l", col="

```



```

    blue", ylim=range(rates_stress_up, r0_stress))
lines(r0_stress, type="l", col="black")
r0_HP_stress = zoo(r0_HP_stress, order.by=basevertices)
lines(r0_HP_stress, type="l", col="green", lty = 2)
legend("bottomright", c("Taxa estressada", "Taxa de mercado 13/08/2007", "Taxa de mercado 16/08/2007"),
      col = c("blue", "black", "green"), lty = c(1, 1, 2), inset = -.05, bty = "n")

```

## A.4 Evolução dos Componentes Principais

Na análise de componentes principais, para se obter a evolução das componentes no decorrer do tempo foi gerado o programa na linguagem R.

```

# Analise da evolucao dos componentes principais

#Funcoes

Data <- function(data, index) {

  row.start <- data$rows[index]

  df <- data$data[row.start:(row.start + data$nobs[index] - 1),]

  return (df)
}

# Corrects orientation of loadings
Fixing <- function(pca) {

  for (pc in 1:ncol(pca[[1]]$load)) {

    last.load <- pca[[1]]$load[,pc]

    for (index in 1:length(pca)) { # Alternatively, could check pca$x / if pca$x is also recorded, need to change
      its orientation
      if (dist(rbind(pca[[index]]$load[,pc], last.load)) > dist(rbind(-pca[[index]]$load[,pc], last.load))) {
        pca[[index]]$load[,pc] <- -pca[[index]]$load[,pc]
        # pca[[index]]$x[,pc] <- -pca[[index]]$x[,pc]
      }
      last.load <- pca[[index]]$load[,pc]
    }
  }

  return (pca)
}

# Calcula o PCA e guarda os valores que serao utilizados
CalculatePrincComp <- function(data, PC, scale) {

  if (identical(PC, NULL) || PC > ncol(data)) {
    PC = min(nrow(data),ncol(data))

```

```

}

## trata a base para evitar erros de input
if ( PC <= 1) {
  PC = 2
}

if (scale) {

  data <- apply(data, 2, function(y) (y - mean(y)) / sd(y) ^ as.logical(sd(y)))

}

PCA <- prcomp(data)

load.matrix <- as.matrix(PCA$rotation)

PC.vol <- summary(PCA)$sdev

PC.explanation <- summary(PCA)$importance[2,]

res <- list(load = load.matrix[,1:PC], explanation = PC.explanation[1:PC], vol = PC.vol[1:PC] )

return (res)

}

# Plot method para o PCA
plot.pca <- function(pca, kind = "explanation", pc = 1, index = 1, ...) {

if (length(pc) > 1) {
  if (kind == "explanation"){
    m <- sapply(pc, function(y) sapply(pca, function(x) x[[kind]][y]))
  }else if (kind == "load"){
    m <- sapply(pc, function(y) sapply(pca, function(x) x[[kind]][index, y]))
  }else if (kind == "map"){
    # m <- sapply(pc, function(y) sapply(pca, function(x) x[[kind]][index, y]))
  }

  for (x in pc) {
    plot.pca(pca, kind = kind, pc = x, index = index, col = x, ylim = c(min(m) - 0.01,max(m) + 0.01), ...)
    par(new = TRUE)
  }
  par(new = FALSE)
} else {

if (kind == "explanation") {
  y <- sapply(pca, function(x) x$explanation[pc])
  plot(y, main = kind, ...)
} else if (kind == "load") {
  y <- sapply(pca, function(x) x$load[index, pc])
  plot(y, main = paste(attributes(pca[[1]]$load)$dimnames[[1]][index], "Principal Component Loadings"), ...)
} else if (kind == "map") {
  y <- pca[[index]]$load[,1:2]
  plot(y[,1],y[,2], main = kind, xlab= "First Principal Component", ylab = "Second Principal Component",
    pch = 15, ...)
}
}
}

```

```

    text(y[,1],y[,2],labels = attributes(pca[[1]]$load)$dimnames[[1]], cex = 0.7, pos = 3)
  }
}
}

# Plot para a soma dos componentes
plot.sumpca <- function(pca, kind = "explanation", pc = 1, index = 1, ...) {

  if (length(pc) > 1) {
    if (kind == "explanation"){
      m <- sapply(pc, function(y) sapply(pca, function(x) x[[kind]][y]))
    } else if (kind == "load"){
      m <- sapply(pc, function(y) sapply(pca, function(x) x[[kind]][index, y]))
    } else if (kind == "map"){
      # m <- sapply(pc, function(y) sapply(pca, function(x) x[[kind]][index, y]))
    }

    for (x in pc) {
      plot.pca(pca, kind = kind, pc = x, index = index, col = x, ylim = c(min(m) - 0.01, max(m) + 0.01), ...)
      par(new = TRUE)
    }
    par(new = FALSE)
  } else {

    if (kind == "explanation") {
      y <- sapply(pca, function(x) sum(x$explanation[1:3]))
      plot(y, main = kind, ...)
    } else if (kind == "load") {
      y <- sapply(pca, function(x) x$load[index, pc])
      plot(y, main = paste(attributes(pca[[1]]$load)$dimnames[[1]][index], "Principal Component Loadings"), ...)
    } else if (kind == "map") {
      y <- pca[[index]]$load[,1:2]
      plot(y[,1],y[,2], main = kind, xlab = "First Principal Component", ylab = "Second Principal Component"
, pch = 15, ...)
      text(y[,1],y[,2],labels = attributes(pca[[1]]$load)$dimnames[[1]], cex = 0.7, pos = 3)
    }

  }
}

# Entrada dos dados

# Direcionando para pasta correta

setwd("C:/Users/Romeu/Desktop/Impa/Projeto Final/Term Structure/modelagem")

load("BaseDI.RData")
colnames (base) = c("data",1, 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189, 210, 231, 252, 273, 294, 315,
336, 357, 378, 399, 420, 441, 462, 483, 504, 525, 546, 567, 588, 609, 630, 651, 672, 693, 714,
735, 756, 777, 798, 819, 840, 861, 882, 903, 924, 945, 966, 987, 1008, 1029, 1050, 1071, 1092,
1113, 1134, 1155, 1176, 1197, 1218, 1239, 1260, 1281, 1302, 1323, 1344, 1365, 1386, 1407, 1428, 1449,
1470, 1491, 1512, 1533, 1554, 1575, 1596, 1617, 1638, 1659, 1680, 1701, 1722, 1743, 1764, 1785, 1806,
1827, 1848, 1869, 1890, 1911, 1932, 1953, 1974, 1995, 2016)
basevertices = as.matrix(c(1, 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, 189, 210, 231, 252, 273, 294, 315,
336, 357, 378, 399, 420, 441, 462, 483, 504, 525, 546, 567, 588, 609, 630, 651, 672, 693, 714,
735, 756, 777, 798, 819, 840, 861, 882, 903, 924, 945, 966, 987, 1008, 1029, 1050, 1071, 1092,
1113, 1134, 1155, 1176, 1197, 1218, 1239, 1260, 1281, 1302, 1323, 1344, 1365, 1386, 1407, 1428, 1449,

```

1470, 1491, 1512, 1533, 1554, 1575, 1596, 1617, 1638, 1659, 1680, 1701, 1722, 1743, 1764, 1785, 1806, 1827, 1848, 1869, 1890, 1911, 1932, 1953, 1974, 1995, 2016))

```
# somente taxas
```

```
taxas = as.matrix(base[1:2647,2:98])
```

```
# invariantes
```

```
inv <- diff(taxas)
```

```
# PCA inputs
```

```
var_rates <- inv*100
```

```
base[1488,1]
```

```
res <- list()
```

```
res$rows <- 1:1158 # 4,5 years of evolution
```

```
res$nobs <- rep(1488,1158) # 6 years of observation
```

```
str(res$nobs)
```

```
res$data <- var_rates
```

```
PC <- 3
```

```
scale <- TRUE
```

```
# roda para a serie toda 10,5 anos
```

```
pca <- CalculatePrincComp(var_rates, PC = PC, scale = scale)
```

```
str(pca)
```

```
pca$explanation
```

```
plot(y=pca$load[,1],x=basevertices, col = "red", type = "l", ylim = c(-0.5,+0.2), main = "First three  
Principal Components for DI curve")
```

```
par(new=TRUE)
```

```
plot(basevertices,pca$load[,2], col = "blue", type = "l",ylim = c(-0.5,+0.2))
```

```
par(new=TRUE)
```

```
plot(basevertices,pca$load[,3], type = "l",ylim = c(-0.5,+0.2))
```

```
autovetorpca1 = as.matrix (pca$load[,1])
```

```
autovetorpca2 = as.matrix (pca$load[,2])
```

```
autovetorpca3 = as.matrix (pca$load[,3])
```

```
# Return the PCAs: list of PCAs, with list of 3 (loads, explanation and vol)
```

```
res.names <- paste(res$rows, res$nobs, sep = "-")
```

```
time <- system.time(pca.evolution <- lapply(1:length(res$rows), function(x) CalculatePrincComp(Data(res,  
x), PC = PC, scale = scale)))
```

```
names(pca.evolution) <- res.names
```

```
cat("Function: ", "CalculatePrincComp", "\n",
```

```
"Time: ", time[1:3],"\n")
```

```
str(pca.evolution)
```

```
#Fixing loadings
```

```
time <- system.time(pca.evolution <- Fixing(pca.evolution))
```

```
cat("Function: ", "FixingRM", "\n",  
    "Time: ", time[1:3], "\n")  
  
# define a class  
class(pca.evolution) <- "pca"  
  
# graficos  
  
plot(pca.evolution, pc = 1, type = "l")  
plot(pca.evolution, pc = 2, type = "l")  
plot(pca.evolution, pc = 3, type = "l")  
#plot(pca.evolution, kind = "map")  
  
# redefine a class  
class(pca.evolution) <- "sumpca"  
  
# graficos  
  
plot(pca.evolution, pc = 1, type = "l", ylim = c(0.95,0.98))
```

# Referências Bibliográficas

- [Alexander(2008)] Carol Alexander. *Market Risk Analysis, Pricing, Hedging and Trading Financial Instruments*. Market Risk Analysis. Wiley, 2008. ISBN 9780470772812.
- [Avellaneda and Laurence(2000)] M. Avellaneda and P. Laurence. *Quantitative Modeling of Derivative Securities: From Theory to Practice*. Chapman & Hall/CRC, 2000. ISBN 9781584880318.
- [Brigo and Mercurio(2001)] D. Brigo and F. Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer Finance. Springer, 2001. ISBN 9783540417729.
- [Coles(2001)] S. Coles. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. U.S. Government Printing Office, 2001. ISBN 9781852334598.
- [Dario(2004)] Alan De Genaro Dario. Utilização da teoria dos valores extremos para o estabelecimento de cenários de estresse: O caso da bmf. *Resenha BMF*, pages 16–25, 2004.
- [Dario and Fernández(2011)] Alan De Genaro Dario and Mariela Fernández. Geração de cenários de estresse para curva de juros. *Revista Brasileira de Finanças*, 9(3):413–436, 2011.
- [do Brasil(2009)] Banco Central do Brasil. Relatório de estabilidade financeira, 2009. [http://www.bcb.gov.br/htms/estabilidade/2009\\_05/refp.pdf](http://www.bcb.gov.br/htms/estabilidade/2009_05/refp.pdf).
- [Hull(2012)] J. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives and DerivaGem CD Package*. Prentice Hall PTR, 2012. ISBN 9780132777421.
- [James and Webber(2000)] J. James and N. Webber. *Interest Rate Modelling*. Wiley Series in Financial Engineering. Wiley, 2000. ISBN 9780471975236.
- [Jorion(1997)] P. Jorion. *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk*. McGraw-Hill, 1997. ISBN 9780786308484.
- [Jorion(2006)] P. Jorion. *Value at Risk, 3rd Ed. : The New Benchmark for Managing Financial Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. Mcgraw-hill, 2006. ISBN 9780071736923.
- [Litterman and Scheinkman(1991)] Robert B Litterman and Jose Scheinkman. Common factors affecting bond returns. *The Journal of Fixed Income*, 1:54–61, 1991.
- [Meucci(2009)] A. Meucci. *Risk and Asset Allocation*. Springer Finance. Springer, 2009. ISBN 9783642009648.
- [Reno(2002)] Adamo Reno, Roberto e Uboldi. Pca based calibration of an hjm model. *Quaderno IAC, Q28-002*, 2002.

- [Rezende(2008)] Rafael B Rezende. Dois ensaios em econometria financeira: Modelagem, previsão e stress da estrutura a termo das taxas de juros. Master's thesis, CEDEPLAR - UFMG, 2008.
- [Ringland(2006)] G. Ringland. *Scenario planning: managing for the future*. Wiley, 2006. ISBN 9780470018811.
- [Schmidt(2011)] Wolfgang M. Schmidt. Interest rate term structure modelling. *European Journal of Operational Research*, 214:1–14, 2011.
- [Shreve(2010)] S.E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer Finance. Springer, 2010. ISBN 9781441923110.
- [Tsay(2010)] R.S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*. CourseSmart. Wiley, 2010. ISBN 9781118017098.
- [Tuckman and Serrat(2011)] B. Tuckman and A. Serrat. *Fixed Income Securities: Tools for Today's Markets*. Wiley Finance. Wiley, 2011. ISBN 9781118133941.
- [Vieira Neto and Urban(2000)] C. A. Vieira Neto and F. Urban. Um modelo de teste de stress menos subjetivo e mais abrangente. Finance lab working papers, Finance Lab, Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, 2000.