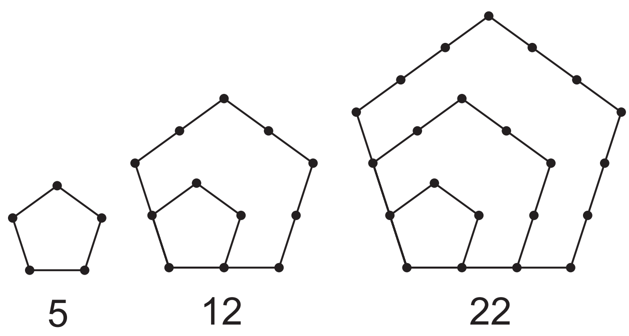
Recorrência

Prof.Luciano Monteiro de Castro

1. (OBMEP) Abaixo temos três figuras pentagonais: a primeira com 5 pontos, a segunda com 12 pontos e a terceira com 22 pontos. Continuando esse processo de construção, a vigésima figura pentagonal terá 651 pontos. Quantos pontos terá a vigésima primeira figura?



2. (OBMEP) Fábio gosta de brincar em escadas, subindo ou descendo seus degraus da seguinte maneira:

- começa no degrau de número 1;
- a cada movimento ele sobe ou desce um ou dois degraus e, ao subir ou descer dois degraus, não pisa no degrau intermediário;
- pisa em todos os degraus exatamente uma vez.

Por exemplo, em uma escada com três degraus ele pode brincar de duas maneiras diferentes: 1-2-3, 1-3-2; com quatro degraus ele pode brincar de quatro maneiras diferentes: 1-2-3-4, 1-2-4-3, 1-3-2-4 e 1-3-4-2.

(a) Fábio pode brincar de seis maneiras diferentes em uma escada com cinco degraus. Escreva essas seis maneiras.

(b) Explique por que sempre é possível terminar a brincadeira no degrau de número 2 em qualquer escada com dois ou mais degraus.

(c) Há 31 e 68 maneiras diferentes de se brincar em escadas com nove e onze degraus, respectivamente. De quantas maneiras diferentes Fábio pode brincar em uma escada com doze degraus?

3. A sequência de Fibonacci $F_0, F_1, F_2, \dots$ é definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e, para todo natural $n \geq 2$,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

(a) Prove que $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$;

(b) Prove que $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$ para quaisquer inteiros positivos m e n;

(c) Prove que se m é múltiplo de n, então F_m é múltiplo de F_n. (Sugestão: utilize o item (c)).

4. Seja $f(n)$ o número de seqüências $a_1, a_2, \dots, a_n$ que podem ser construídas de forma que cada a_k é igual a $+1, -1$ ou 0 sem que ocorram dois termos consecutivos iguais a $+1$ ou dois termos consecutivos iguais a -1. Prove que $f(n)$ é o inteiro mais próximo de $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}$.