Problemas envolvendo extremos

26 de Junho de 2018

O bom senso recomenda evitar os extremos. Ocorre que para nós, matemáticos, às vezes devemos *procurar* os extremos.

Nesta aula, veremos alguns problemas cujas soluções envolvem valores extremos, de um modo ou de outro. Também aproveitaremos para discutir alguns processos úteis para resolver problemas em geral.

1. Como devemos ler um enunciado?
2. O que podemos ganhar tentando imaginar uma solução?
3. Como descobrimos quais técnicas e conceitos matemáticos devem estar envolvidos na solução do problema?
4. Como devemos apresentar a solução do problema?

Abordaremos dois problemas em aula. O outro ficará para a Sessão da Tarde.

Problema 1: *Alunos dorminhocos*

Imagine uma aula de matemática com a seguinte propriedade:

- Cada aluno nesta aula tira uma única **soneca**: isto é, ele cai no sono num certo instante de tempo s e acorda no instante de tempo $t > s$. (Contaremos s, t e todos os números entre eles como momentos em que o dado aluno está dormindo.)
- Dados quaisquer dois alunos, há ao menos um instante de tempo em que ambos estão dormindo.

Demonstre que há pelo menos um instante de tempo em que *todos os alunos estão dormindo simultaneamente.*

Problema 2: *Formando casais grandes*

Imagine que temos n homens e n mulheres, todos com alturas dintintas. Formado um casal (monogâmico, homem-mulher), chamamos de *tamanho do casal* o produto das alturas dos cônjuges. De que maneira devemos casar os homens e as mulheres de modo a maximizar a *soma dos tamanhos dos casais* ?

Problema 3: *Baldes de tinta*

Temos $n > 1$ pessoas num descampado. Todas estão participando de uma brincadeira em que jogarão baldes de tinta nos outros. A regra é que cada pessoa jogará seu balde de tinta no participante mais próximo de si (excluindo a si mesma!). Mostre que, se n é ímpar e todas as distâncias entre as pessoas são distintas, então pelo menos um participante sairá limpo do jogo.

1 O problema dos alunos dorminhocos (em aula)

Este é um típico problema em que a tese é intuitiva, mas uma solução correta pode não ser muito simples de escrever. Quando ainda havia PROFMAT no IMPA, eu o usei muitas vezes como exemplo no curso de Resolução de Problemas. A ideia lá – e também aqui – era que o aluno/professor sentisse **(a)** que o problema aparentemente era simples; **(b)** que ainda assim era fácil ficar "empacado"; e que **(c)** felizmente há meios e saídas para desatolar.

1.1 Explorando o enunciado

Se você está na condição de empacado, minha primeira recomendação é que não pense imediatamente em *resolver* o problema, mas sim em *explorar o enunciado.* Eis alguns modos de fazer isso.

1. Tente *desenhar o enunciado.*
2. Procure entender *exemplos* e *casos pequenos.*
3. Busque sacar quais são os *objetos matemáticos envolvidos.*
4. Procure entender a hipótese fazendo o *enunciado quebrar.*

Os itens acima não são muito específicos. Saber se eles se aplicam ou não no seu problema é uma questão de tempo, treino, experiência e (no fim das contas) análise caso a caso.

Vamos começar pelo desenho. Como se pode desenhar bem este problema? Vamos partir da maneira habitual de pensar no tempo como uma linha reta. O que você enxerga quando faz isto?

Com alguma sorte, você deve enxergar algumas coisas. Primeiro, o tempo que cada aluno gasta dormindo é um *intervalo fechado* na reta, isto é, um conjunto de números reais entre t e s (incluindo os dois extremos). Além disto, quando falamos que dois alunos têm algum instante comum de soneca, isto quer dizer que os intervalos correspondentes têm interseção não-vazia. Isto nos dá um ponto fundamental para a solução formal do problema.

Os objetos matemáticos envolvidos são **intervalos**. Nosso problema é sobre **interseções de intervalos**.

Vamos agora considerar casos pequenos. O menor caso que é interessante é o de três intervalos. Imagine que você desenha dois intervalos se interceptam. Você certamente ficará convencido de que, ao desenhar um terceiro que intercepta os outros dois dois, haverá um ponto de interseção comum aos três. O mesmo vale em desenhos com mais intervalos. *Isso não é uma prova*, mas não se apresse. Antes de seguir adiante, é bom tentar mais uma coisa.

Como faço para **quebrar o enunciado?**

Isto é, será que eu consigo desenhar intervalos que respeitam a restrição do problema (quaisquer dois se interceptam) sem satisfazer a conclusão de que todos têm um ponto comum de interseção? Tente bastante até se convencer de que isto não é possível.

Por outro lado, se mudamos um um pouco o enunciado, fica claro que o problema realmente "quebra". É um pouco difícil entender como isto deve ser feito de início, portanto eis uma dica simples. Vamos supôr que cada aluno pode tirar duas ou mais sonecas. Neste caso, é fácil observar que o resultado não vale. Eis um contra-exemplo com três alunos que dormem nos tempos:

$$[1,2] \cup [3,4],\ [3,4] \cup [6,7] \text{ e } [1,2] \cup [6,7].$$

É, portanto, fundamental só termos uma soneca por aluno.

O valor desta constatação é o seguinte. Imagine que alguém estudante apresenta o que acredita ser uma solução deste problema que *não faz uso* *do fato que cada aluno tira uma única soneca.* O exemplo que exibimos acima mostra que esta solução tem de estar errada, porque ela se aplicaria a situações em que não vale a conclusão final do problema. Deste modo, fica claro que a *solução do problema* tem de envolver o conceito de intervalo. [1]

1.2 Qual é o próximo passo?

A esta altura você e eu já estamos convencidos de que o problema está correto e de que sua conclusão é intuitiva. O que falta é a solução e ela pode não parecer óbvia.

Antes de buscá-la, é importante pensar se faz mesmo sentido. Se estamos convencidos de algo, pode parecer que a demonstração é supérflua. A questão é: será que não estamos nos iludindo? Há vários casos em que um enunciado que *parece* verdadeiro se revela falso. Um matemático ilustre chamado Gian Carlo Rota (1932 - 1999) escreveu:

> Na maior parte do tempo, o trabalho de um matemático é um emaranhado de chutes, analogias, frustação e a vontade de acreditar que as coisas são simples. Demonstrações não são a parte central das descobertas; normalmente elas são apenas a maneira que termos para impedir que nossas mentes nos enganem.[G. C. Rota]

Duas coisas estão implícitas nestas frases. A primeira é que a demonstração formal só deve ser tentada quando já entendemos bem o problema e queremos ter certeza de que estamos certos. Em vários casos isto nos exigirá voltar várias vezes à fase de exploração do problema, buscando detalhes que podem nos ter passado desapercebidos e tentando novas ideias.

Em segundo lugar, Rota nos alerta que às vezes nossas mentes nos enganam. Isto é, se queremos estar *certos*, devemos usar a intuição como caminho para descobrir uma demonstração formal.

Há também um argumento *pedagógico* para a busca de provas corretas. Um dos principais motivos para se aprender Matemática é desenvolver o pensamento lógico-dedutivo. É exatamente esta forma de raciocinar que exercitamos ao buscar uma demonstração formal. A intuição é a luz que ilumina nosso caminho dedutivo, mas é o rigor que nos dá segurança e firmeza.

[1] É claro que, ao menos em princípio, há a possibilidade do estudante fazer uso de uma hipótese que impede o exemplo acima, mas é mais geral do que os intervalos fechados. O professor deve ter cuidado para não ser injusto com este aluno, que pode ter tido uma ideia brilhante; mas, na prática, é bem mais provável que estejamos diante de um erro.

1.3 Explorar com vistas a resolver

Nossa exploração do problema já nos deu motivos para “acreditar” no problema. Agora vamos voltar a explorar o enunciado tentando achar caminhos para resolvê-lo. Esta frequentemente é a parte mais difícil, na qual só nos tornamos melhores com tranquilidade e bastante treino.

Esta exploração de caminhos é em grande parte uma maneira de buscar a técnica certa para cada problema. Infelizmente os problemas não vêm com etiquetas indicando o que podemos fazer, mas podemos, sim, desenvolver nosso faro para as boas ideias.

Como anunciado, esta é uma aula com um tema.

Procure **extremos**!

Vamos juntar isso com outra ideia.

Faça **engenharia reversa**!

Como antes, temos dois princípios gerais vagos. Deixe eu tentar guiar um pouco mais a solução. Em primeiro lugar, *se há um período de soneca comum, seus extremos são o momento em que o período começa e o momento em que ele termina.* Veja que ao dizer isso, há uma forte sugestão de que esse período também é um intervalo. De fato, as figuras de antes corroboram isso.

A questão agora é quando começa a soneca comum e quando ela termina. Aí vem a engenharia reversa: *se há mesmo uma soneca comum, ela só pode começar quando o último aluno dorme e tem de terminar quando o último aluno acorda.*

Agora já temos mais clareza do que provar.

> **Objetivo novo:** provar que há uma soneca comum, que vai do momento em que o último aluno cai no sono até o primeiro despertar.

Note: em geral é necessário tentar vários objetivos até que um funcione. Neste caso isto não será necessário.

1.4 Do enunciado ao formalismo: hipótese e tese

Este é um passo que frequentemente omitimos na prática, mas que tem sempre de estar presente (ainda que de forma implícita), porque a noção de corretude em Matemática passa necessariamente pelo formalismo.

Primeiro vamos lembrar que temos um problema sobre intervalos fechados. Para sermos mais formais, vamos supôr que temos n alunos, onde $n > 1$ é natural. Numeraremos os alunos de 1 a n. O tempo em que um aluno $1 \leq i \leq n$ dorme é um *intervalo* $I_i = [a_i, b_i]$ com $a_i < b_i$.

Agora vamos formular nossas hipótese e tese. A hipótese deve esclarecer que temos intervalos fechados que se interceptam dois a dois. A tese deve afirmar que todos os intervalos se interceptam. Em "matematiquês", isto se escreve assim.

Teorema 1. HIPÓTESE: *$I_1, \ldots, I_n$ sã o intervalos da forma $I_i = [a_i, b_i]$ com $a_i < b_i$. Temos ainda que $I_j \cap I_j \neq \emptyset$ para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$.*
TESE: *$I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n \neq \emptyset$.*

1.5 A demonstração

Como já dissemos acima, a estratégia da prova será provar que o intervalo

$$J = [\max a_i, \min b_j],$$

que possivelmente é degenerado, corresponde a momentos de soneca comum. Fazemos isto em partes.

Parte 1: J é mesmo um intervalo. Para provar isto, precisamos mostrar que $\max a_i \leq \min b_j$. Seja i_* um índice tal que $a_{i_*} = \max a_i$ e seja j_* tal que $b_{j_*} = \min b_j$. Sabemos que os intervalos I_{i_*} e I_{j_*} se interceptam (por hipótese).

> **Afirmação não-trivial:** se dois intervalos fechados se interceptam, o menor ponto de um é menor que o maior ponto do outro.

Esta afirmação é destacada por ser o ponto chave da prova formal. Ela é o *principal ponto da prova* em que usamos o fato de que lidamos com intervalos.

Para demonstrar a afirmação, sejam $A = [x, y]$ e $B = [z, w]$ dois intervalos fechados quaisquer com $x \leq y$ e $z \leq w$. A afirmação diz que $y \geq z$ sempre que $A \cap B \neq \emptyset$. Vejamos porque isto é verdade.

Se $A \cap B$ é não-vazio, tome $t \in A \cap B$ e note que:

$$t \in A \Rightarrow x \leq t \leq y \text{ e } t \in B \Rightarrow z \leq t \leq w.$$

Portanto, $z \leq t \leq y$, o que implica $z \leq y$, como desejado.

No nosso caso particular, isto diz que $a_{i_*} \leq b_{j_*}$, o que completa a primeira parte da prova.

Parte 2: $J \subset I_1 \cap \cdots \cap I_n$. Basta mostrar que $J \subset I_k$ para todo $1 \leq k \leq n$. Mas isto segue claramente do fato que $a_k \leq \max a_i \leq \min b_j \leq b_k$.

Exercício 1. *Voce consegue mostrar que $J = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n$?*

Exercício 2. *Voce consegue mostrar que dois intervalos fechados se interceptam se e somente se o menor ponto de um deles é menor que o maior ponto do outro? No que isto difere da "afirmação não-trivial" acima?*

Exercício 3. *O que mudaria na prova se os intervalos fossem abertos?*

Exercício 4. *Recorde os comentários feitos nas seções anteriores. De que maneira eles apareceram na prova formal? O que lhe pareceu mais ou menos importante para o resultado final?*

2 Formando casais grandes (em aula)

Este problema, para mim, também deveria ser considerado um clássico. Não digo isso porque as normas de casamento são tradicionais. O ponto é que ele não é óbvio, nem tampouco terrivelmente difícil. Além disso, ele é muito útil na vida de um pesquisador em Matemática.

Esse problema talvez não seja tão misterioso quanto o primeiro. De fato, acho que você não terá dificuldade em concluir o que deve ser feito para resolvê-lo. A dificuldade será dar uma demonstração conveniente. Outro ponto é que aqui a necessidade de procurar o extremos já está no enunciado (não está?).

2.1 Explorando o enunciado

Voltemos àquela lista de maneiras de começar a penetrar no problema.

1. Tente *desenhar o enunciado.*
2. Procure entender *exemplos* e *casos pequenos.*
3. Busque sacar quais são os *objetos matemáticos envolvidos.*
4. Procure entender a hipótese fazendo o *enunciado quebrar.*

Do meu ponto de vista, a dica 1 não ajuda muito neste caso. A 2 e a 3 são mais interessantes.

De fato, o problema que temos é fácil de entender no caso $n = 2$. Vamos imaginar que as alturas dos homens são 1 e 2 metros e as das mulheres são 3 e 4 (claro que os números não fazem sentido real, mas e daí?). Se casamos o primeiro homem com a primeira mulher e o segundo homem com a segunda mulher, temos soma de tamanhos

$$1 \times 3 + 2 \times 4 = 11.$$

Já se trocamos os casais, temos soma de tamanhos

$$1 \times 4 + 2 \times 3 = 10.$$

Logo, ao menos neste caso, é melhor juntar os menores num casal e os maiores em outro.

Será que isso é sempre verdade? Se você continuar tentando, provavelmente concluirá que sim. É claro que, como vimos acima, isso não resolve o problema. No entanto, dá para a gente se arriscar a resolvê-lo no caso $n = 2$, como faremos abaixo.

Algebrizemos o problema. Chame de $h_1 < h_2$ as alturas dos dois homens e de $m_1 < m_2$ a altura das duas mulheres. Se nosso chute está correto, deve ser verdade que:

$$h_1 m_2 + h_2 m_1 < h_1 m_1 + h_2 m_2 \text{ (?)}.$$

Mas veja que isso vale mesmo! Afinal, a diferença entre o lado direito e o esquerdo é

$$h_1 m_1 + h_2 m_2 - h_1 m_2 - h_2 m_1 = (h_1 - h_2)\,(m_1 - m_2).$$

Veja que, como $h_1 < h_2$ e $m_1 < m_2$, o lado direito da igualdade acima é produto de dois negativos, logo positivo:

$$h_1 m_1 + h_2 m_2 - h_1 m_2 - h_2 m_1 > 0.$$

Deduzimos então que

$$h_1 m_1 + h_2 m_2 > h_1 m_2 - h_2 m_1,$$

como queríamos demonstrar.

Esse sucesso ainda não é o fim da solução, mas já nos dá alguma ideia do que queremos fazer no caso geral. Talvez seja hora de passar para o próximo passo, seguindo a recomendação 3.

2.2 Explorar com vistas a resolver

Podemos imaginar que as alturas dos homens são $h_1 < h_2 < h_3 < \cdots < h_n$ e as das mulheres são $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_n$. Pensando um pouco e escrevendo exemplos com $n = 3$, deve ficar claro que:

> Casar homens e mulheres e atribuir a i-ésima mulher um marido $\sigma(i)$, com σ uma **permutação** de $\{1, \ldots, n\}$.

Portanto, o que queremos é provar que a permutação que maximiza

$$m_1\, h_{\sigma(1)} + m_2\, h_{\sigma(2)} + \cdots + m_n\, h_{\sigma(n)}$$

é a permutação identidade.

Como se pode provar isso? Aqui estamos diante de um impasse. À primeira vista, a solução formal precisa de alguma forma passar por todas as permutações e provar que a melhor é a identidade. Será que isso é necessário?

Não custa buscar uma rota alternativa que atenda a dois desejos simples. Aqui estou procedendo na base do *wishful thinking* mesmo!

- Que bom seria se conseguíssemos aproveitar a prova do caso $n = 2$ de alguma forma.
- Que bom seria se houvesse um argumento baseado nalguma propriedade especial que permutação identidade tem e as outras não têm.

Vamos pensar de que forma podemos conciliar os itens. O ponto mais importante do primeiro é que o caso $n = 2$ nos diz que: considerados dois homens $i < j$ (com $h_i < h_j$) e duas mulheres $k < \ell$ com $m_k < m_\ell$, é sempre melhor casar i com k e j com ℓ do que o contrário. Ou seja, se σ for a melhor permutação, ela deve respeitar a ordem dos índices.

Mas opa! Isso bate com o segundo ponto acima. O que a permutação de identidade tem de especial é que ela preserva a ordem dos índices! Ou seja, a única permutação com $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(n)$ é a permutação identidade. Com isso, já temos a faca e o queijo na mão para a solução formal.

2.3 A solução formal

Teorema 2. HIPÓTESE: *$n \neq 0$ é natural e $h_1 < h_2 < \cdots < h_n$, $m_1 < \cdots < m_n$ são números reais.*
TESE:

$$m_1 h_1 + m_2 h_2 + \cdots + m_n h_n$$

é o valor de

$$\max\{m_1\, h_{\sigma(1)} + \cdots + m_n h_{\sigma(n)} \,:\, \sigma \textit{ permutação de } \{1,\ldots,n\}\}.$$

PROVA: Tome uma permutação σ que atinge o máximo acima. Queremos provar que ela é a permutação identidade. Para isso, basta provar que $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(n)$.

Tome então um índice $1 \le i < n$. Queremos provar que $\sigma(i) < \sigma(i+1)$. Considere então m_i, m_{i+1}, $h_{\sigma(i)}$ e $h_{\sigma(i+1)}$. Imagine que transpomos os valores de $\sigma(i+1)$ e $\sigma(i)$, obtendo uma nova permutação com soma:

$$\text{nova soma} = \text{soma antiga} + m_{i+1}h_{\sigma(i)} + m_i\, h_{\sigma(i+1)} - m_{i+1}h_{\sigma(i+1)} + m_i\, h_{\sigma(i)}.$$

Como σ é a melhor permutação, a soma nova é no máximo a soma antiga, e a soma dos quatro termos acima é ≤ 0. Ou seja,

$$(m_{i+1} - m_i)\,(h_{\sigma(i)} - h_{\sigma(i+1)}) \le 0.$$

Como $m_{i+1} > m_i$, isso quer dizer que $h_{\sigma(i)} < h_{\sigma(i+1)}$ e portanto $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.

Exercício 5. *Você sabe demonstrar formalmente que a permutação identidade é a única com $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(n)$?*

Exercício 6. *O que acontece se algumas alturas são repetidas?*

Exercício 7. *E se quiséssemos a menor soma possível dos tamanhos dos casais?*

3 O problema dos baldes de tinta (para a seção de exercícios)

Este problema vem do livro *The Art and Craft of Problem Solving*, de Paul Zeitz.

3.1 Explorando o problema

A exploração deste problema começa testando as regras do problema para ver se as entendemos. Depois disso, podemos lembrar de um princípio geral muito importante:

Princípio das histórias de detetive: tudo que é mencionado no enunciado do problema deve ser encarado como uma possível pista para a solução.

O que é mencionado no enunciado? Além das regras do jogo, a úica coisa dita é que o número n deve ser ímpar. Será que a informação é útil?

Uma hipótese é útil sempre que o enunciado *quebra* quando a removemos.

Depois de pensar um pouco, fica claro que *sim*. Se só há duas pessoas, por exemplo, uma joga tinta na outra. Se há quatro, podemos ter um par de jogadores aqui no Rio e outro em Manaus; aí cada pessoa suja e é sujada.

Por que no caso ímpar é diferente? Eis outra dica pra resolver.

Tente casos *pequenos*.

O menor caso que faz sentido é $n = 3$. O que dá para enxergar nesse caso? Fazendo alguns desenhos, você poderá concluir que as duas pessoas mais próximas (isto é, o lado mais curto do triângulo) sempre se atacam mutuamente, enquanto que a que sobra não recebe tinta de ninguém. De fato, a primeira parte é geral.

Fato para se guardar: como as distâncias são distintas, existe uma menor distância. Os dois pontos p_1, p_2 que atingem esta menor distância se atacam mutuamente.

A partir daqui há vários caminhos a seguir, mas nenhum deles parece trivial. Antes de embarcar num deles, vamos observar algumas coisas.

Podemos também excluir algumas possibilidades. Por exemplo, pode parecer natural conjecturar que o ponto que realiza a "maior menor distância" pros demais deve restar seco.

Exercício 8. *Ache um contraexemplo para esta conjectura.*

O que dá para fazer, então? Tente pensar por *indução* ou recursão!