MA12 - Unidade 1
Números Naturais

Paulo Cezar Pinto Carvalho

PROFMAT - SBM

January 27, 2014

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Os Números Naturais

- Números Naturais: modelo abstrato para contagem. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Uma descrição precisa e concisa de $\mathbb{N}$ é dada pelos *Axiomas de Peano*.
- Noção fundamental: a de *sucessor* de um número natural (ou seja, o número que, intuitivamente, vem logo depois dele).

Os Axiomas de Peano

a) Todo número natural tem um único sucessor;

b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

c) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

d) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

O Axioma da Indução

- O último dos axiomas de Peano é conhecido como *Axioma da Indução* e é a base para um método de demonstração para propriedades relativas aos números naturais (*demonstrações por indução*).
- Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

  i) $P(1)$ é válida;

  ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n')$, onde n' (ou $n+1$) é o sucessor de n.

  Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

Exemplo: uma demonstração por indução

- Provar a validez, para todo número natural n, da igualdade $P(n): 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$
- Para $n = 1$, $P(1)$ se resume a afirmar que $1 = 1$. Supondo $P(n)$ verdadeira para um certo valor de n, somamos $2n+1$ a ambos os membros da igualdade acima, obtendo

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1,$$

ou seja:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + [2(n+1) - 1] = (n+1)^2.$$

Mas esta última igualdade é $P(n+1)$. Logo
$P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Assim, $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

As Duas Operações: Adição e Multiplicação

- A soma $n + p$ é o número natural que se obtém a partir de n aplicando-se p vezes seguidas a operação de tomar o sucessor. Em particular, $n+1$ é o sucessor de n, $n+2$ é o sucessor do sucessor de n, etc.
- Quanto ao produto, põe-se $n \cdot 1 = n$ por definição e, quando $p \neq 1$, np é a soma de p parcelas iguais a n.
- Estas operações podem ser formalizadas usando indução.

Usando indução para definir as operações

- *Adição:*
  - $n+1 =$ sucessor de n
  - $n+(p+1) = (n+p)+1$.
- *Multiplicação:*
  - $n \cdot 1 = n$
  - $n(p+1) = np+n$.
- As propriedades destas operações (comutativa, associativa, etc) podem ser demonstradas por indução.

A Ordenação nos Números Naturais

- Dados $m,\ n \in \mathbb{N}$, diz-se que *m é menor do que n*, e escreve-se $m < n$, para significar que existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.
- Propriedades:
  - **a)** Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.
  - **b)** Dados $m,\ n \in \mathbb{N}$, vale uma, e somente uma, das alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$.
  - **c)** Se $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + p < n + p$ e $mp < np$.
  - **d)** (Propriedade da Boa Ordenação) Todo subconjunto não-vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento. Isto significa que existe um elemento $n_0 \in X$ que é menor do que todos os demais elementos de X.

MA12 - Unidade 2
Números Cardinais

Paulo Cezar Pinto Carvalho

PROFMAT - SBM

February 17, 2014

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Números cardinais

- A importância dos números naturais provém do fato de que eles constituem o modelo matemático que torna possível o processo de contagem.
- *Contar* um conjunto X significa estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de X e os de um subconjunto de $\mathbb{N}$ da forma $I_n = \{x \in \mathbb{N} | x \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\}$.
- Quando é possível estabelecer tal correspondência biunívoca, dizemos que X é um conjunto finito e que n é o *número cardinal* ou *número de elementos* de X.

Propriedades

a) *O resultado da contagem (ou seja, o número cardinal de X) é sempre o mesmo, não importando a contagem que seja feita.*

b) *Todo subconjunto Y de um conjunto finito X é finito e $n(Y) \leq n(X)$. Tem-se $n(Y) = n(X)$ somente quando $Y = X$.*

- Observação: A fim de evitar exceções, o conjunto vazio $\varnothing$ é incluído entre os conjuntos finitos e diz-se que $\varnothing$ tem zero elementos.

Conjuntos Infinitos

- Diz-se que um conjunto X é *infinito* quando ele não é finito. Isto quer dizer que X não é vazio e que, não importa qual seja $n \in \mathbb{N}$, não existe correspondência biunívoca $f : I_n \to X$.
- Exemplo: o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito.
  - Dada qualquer função $f : I_n \to \mathbb{N}$, não importa qual seja n , tomamos $k = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$.
    Para todo $x \in I_n$, tem-se $f(x) < k$; logo não existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = k$.
    Assim, f não pode ser uma correspondência biunívoca.

Comparando conjuntos infinitos

- Dois conjuntos X e Y têm a mesma cardinalidade quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre X e Y (isto é, existe uma função bijetiva $f : X \to Y$).
- Exemplo: os conjuntos $\mathbb{N}$ dos números naturais e $P = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ dos números pares têm a mesma cardinalidade.
  - A bijeção já está dada na definição de P: a função $f : \mathbb{N} \to P$ definida por $f(n) = 2n$ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ em P.
- Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dos pares de números naturais também têm a mesma cardinalidade.

Conjuntos enumeráveis

- Um conjunto é *enumerável* quando é finito ou tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$.
- Por exemplo, os conjuntos $\{2, 5\}$, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ são enumeráveis.

Um exemplo de conjunto não enumerável

- Um conjunto infinito é necessariamente enumerável? NÃO!
- O conjunto de todas as sequências em que os termos são 0 ou 1 **não é** enumerável.
- Prova: o método da diagonal de Cantor.
  - Trocando o n-ésimo termo da n-ésima sequência produz-se uma nova sequência que não está na enumeração proposta!

MA12 - Unidade 3
O Método da Indução

Paulo Cezar Pinto Carvalho

PROFMAT - SBM

31 de Janeiro de 2014

Definições por indução ou recorrência

- Como definir, apropriadamente, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$?
  - **i)** Definimos $1! = 1$
  - **ii)** A seguir, supondo $n!$ definido, fazemos $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.
- Note que
  - i) garante que $1!$ está bem definido.
  - ii) garante que, se $n!$ está bem definido, $(n+1)!$ também está.
- Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $n!$ está bem definido para todo n natural.

Somatórios e Produtórios

- Seja (x_n) uma sequência de elementos de um conjunto A dotado de operações de adição e multiplicação.
  O *somatório*
  $$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
  e o *produtório*
  $$P_n = \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$
  podem ser definidos como se segue:
  - $S_1 = P_1 = x_1$
  - $S_{n+1} = S_n + x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$
  - $P_{n+1} = P_n \cdot x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Demonstrando igualdades

- Obter uma expressão para $S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$.
  $S_1 = 1$
  $S_2 = 4$
  $S_3 = 9$
  ...
- Conjectura: $S_n = n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

A prova por indução

- Seja $P(n)$: $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.
  - **i)** $P(1)$: $1 = 1^2$ é verdadeira.
  - **ii)** Suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $P(n)$ verdadeira.
    Somando $2(n+1) - 1 = 2n + 1$ a ambos os lados dessa igualdade, temos:
    $$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$
    o que mostra que $P(n+1)$ também é verdadeira.
- Pelo Princípio de Indução, tem-se que a fórmula $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrando desigualdades

- Demonstrar a desigualdade de Bernoulli: $(1+h)^n \geq 1 + nh$, para todo n natural e todo $h > -1$
  - **i)** Como $(1+h)^1$ e $1 + 1.h$ são ambos iguais a $1 + h$, $P(1)$ é verdadeira.
  - **ii)** Suponhamos que $P(n)$, para algum $n \in$, seja verdadeira, ou seja, $(1+h)^n \geq 1 + nh$.
    Multiplicando ambos os lados por (1+h):
    $(1+h)^{n+1} \geq (1+nh)(1+h) = 1 + (n+1)h + nh^2$.
    Mas $1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h$.
    Logo, $(1+h)^{n+1} \geq 1 + (n+1)h$, o que mostra que $P(n+1)$ é verdadeira.
- Portanto, pelo Princípio da Indução, $P(n)$ vale para todo n natural.

Aplicações em aritmética

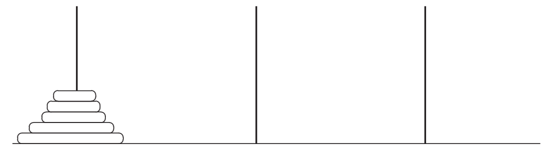
- Mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 6n - 1$ é divisível por 9.

  i) Como $4^1 + 6.1 - 1 = 9$, a propriedade vale para $n = 1$.

  ii) Suponha, agora, que, para algum $n \geq 1$, saibamos que $4^n + 6n - 1$ é divisível por 9. Logo, $4^n + 6n - 1 = 9k$, ou seja, $4^n = 9k - 6n + 1$, para algum inteiro k.
  Mutiplicando por 4 ambos os lados:
  $4^{n+1} = 9k - 24n + 4$.
  Logo
  $4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 9k - 24n + 4 + 6(n+1) - 1 =$
  $9k - 18n + 9 = 9(k - 2n + 1)$.
  Portanto, $4^{n+1} + 6(n+1) - 1$ é divisível por 9.

- Logo, pelo Princípio da Indução , $4^n + 6n - 1$ é divisível por 9 para todo número natural n.

A Torre de Hanói



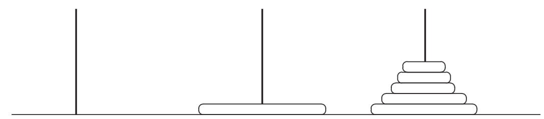
- Transferir a pilha de discos para uma outra haste, deslocando um disco de cada vez, de modo que, a cada passo, um disco nunca esteja colocado sobre um disco menor.

1. O jogo tem solução para cada $n \in \mathbb{N}$?
2. Em caso afirmativo, qual é o número mínimo j_n de movimentos para resolver o problema com n discos?

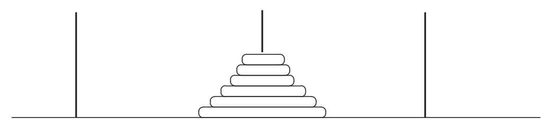
Torre de Hanói: o jogo sempre tem solução!

- Obviamente, o jogo tem solução para $n = 1$.
- Suponhamos que o jogo tenha solução para n discos e vamos mostrar que, daí, decorre que o jogo também tem solução para $n + 1$ discos.
- Primeiro, transferimos os n discos superiores para uma das outras hastes (isto é possível, pela hipótese de indução).

- A seguir, transferimos o disco inferior para a outra haste.



- Finalmente, transferimos os demais n discos para a haste em que colocamos o disco maior (é possível, pela hipótese de indução e pelo fato de o disco inferior ser maior que todos os outros)



- Pelo Princípio da Indução, concluímos que o jogo tem solução para todo $n \in \mathbb{N}$.

Torre de Hanói: Qual é o número mínimo de movimentos?

- Executar a tarefa para $n + 1$ discos necessariamente envolve retirar os n discos superiores, colocando-os em outra haste e, depois de mover o disco inferior, recolocá-los sobre ele.
- O número mínimo j_n de movimentos é, portanto, tal que
  - $j_1 = 1$
  - $j_{n+1} = j_n + 1 + j_n = 2j_n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- É fácil mostrar, por indução, que $j_n = 2^n - 1$.
- (Na Unidade 8, aprenderemos a encontrar a expressão para o termo geral de sequências definidas por recorrências como esta.)

A Pizza de Steiner

- Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos?

Número de cortes	Número máximo de partes
1	2
2	4
3	7
...	...
$n-1$	p_{n-1}
n	p_n
$n+1$	p_{n+1}

- O padrão observado acima sugere que o número máximo de pedaços obtidos com n cortes é:

$$p_n = 2 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

.

A Pizza de Steiner: prova por indução

- Com apenas um corte obtemos dois pedaços. Portanto, a fórmula está correta para $n = 1$, pois $p_1 = \frac{1(1+1)}{2} + 1 = 2$.
- Admitamos que, para algum valor de n, a fórmula para p_n esteja correta. Vamos mostrar que a fórmula para p_{n+1} também está correta.
- O ponto crucial é mostrar que são acrescentados $n+1$ pedaços no $(n+1)$-ésimo corte.

- Para que o $(n+1)$-ésimo corte produza o número máximo de pedaços, ele deve encontrar cada um dos n cortes anteriores em pontos que não são de interseção de dois cortes. Neste caso, como n pontos subdividem uma reta em $n+1$ partes, ele subdivide $n+1$ regiões, criando assim, $n+1$ novos pedaços.
- Logo,

$$p_{n+1} = p_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$$

  o que mostra que a fórmula está correta para $n+1$.
- Pelo Princípio da Indução, a fórmula está correta para todo $n \in \mathbb{N}$.

MA12 - Unidade 4
Mais Sobre Indução

Paulo Cezar Pinto Carvalho

PROFMAT - SBM

7 de Março de 2014

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Começando de um certo natural n_0

- Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n e seja n_0 um número natural. Suponhamos que:
  - **i)** $P(n_0)$ é válida.
  - **ii)** Para todo $n \geq n_0$, a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n+1)$.
- Então, $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq n_0$.
- **Prova:** Basta mostrar, por indução, que $Q(n) : P(n+n_0-1)$ é válida para todo n natural.

Exemplo

- Mostrar que $P(n)$: $2^n > n^2$, para todo número natural $n \geq 5$.

i) Temos que $P(5)$: $2^5 > 5^2$ é verdadeira.

ii) Seja $n \geq 5$ tal que $2^n > n^2$.
Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por 2, obtemos $2^{n+1} > 2n^2$.
Mas $2n^2 > (n+1)^2$?
Sim, para $n \geq 3$, pois é equivalente a $n(n-2) > 1$.
Daí, $2^{n+1} > (n+1)^2$, o que significa que $P(n+1)$ é verdadeira.

- Logo, pela forma generalizada do Princípio de Indução Matemática, a desigualdade vale para todo número natural $n \geq 5$.

Usando mais de um antecessor

- Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao natural n. Suponhamos que:
  - **i)** $P(1)$ e $P(2)$ são válidas.
  - **ii)** Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ e $P(n+1)$ implicam a validez de $P(n+2)$.
- Então, $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.
- **Prova:** Basta mostrar, por indução, que $Q(n) : P(n)$ *e* $P(n+1)$ *são válidas* é verdadeira para todo natural n.

Os coelhos de Fibonacci

- Um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento.

mês	número de casais do mês anterior	número de casais recém-nascidos	total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21

- O número de casais de coelhos em um determinado mês (a partir do terceiro) é igual ao número total de casais do mês anterior acrescido do número de casais nascidos no mês em curso, que é igual ao número total de casais do mês anterior ao anterior.
- Se u_n é o número de casais no n-ésimo mês, temos
  - $u_1 = 1$
  - $u_2 = 1$
  - $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$
- Estas relações definem a chamada *sequência de Fibonacci*.
- É fácil mostrar, por indução, que

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Indução Completa

- Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao natural n. Suponhamos que:
  - **i)** $P(1)$ é válida.
  - **ii)** Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(k)$, para todo $k \leq n$, implica na validez de $P(n+1)$.
- Então, $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.
- **Prova:** Basta mostrar, por indução, que $Q(n) : P(1), P(2), \ldots, P(n)$ *são todas válidas* é verdadeira para todo natural n.

Exemplo

- Seja a_n uma sequência definida por $a_0 = 2$ e $a_{n+1} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{n+2}$, para cada natural n. Qual é o termo geral de a_n?
- Os primeiros termos da sequência são
  $a_1 = \frac{2}{2} = 1$, $a_2 = \frac{2+1}{3} = 1$, $a_3 = \frac{2+1+1}{4} = 1$,
  o que sugere que $a_n = 1$, para todo $n \geq 1$, com $a_0 = 2$.
  - **i)** $P(1)$: $a_1 = 1$ é verdadeira.
  - **ii)** Suponhamos, agora, que $P(k)$ seja válida (isto é, $a_k = k$) para todo k tal que $1 \leq k \leq n$.
    Então, $a_{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{n+2} = \frac{2+n.1}{n+2} = 1$,
    o que mostra que a fórmula vale para $n+1$.

  Logo, por indução completa, $a_n = 1$, para todo $n \geq 1$.