

Introdução às funções: *a abordagem do projeto Livro Aberto*

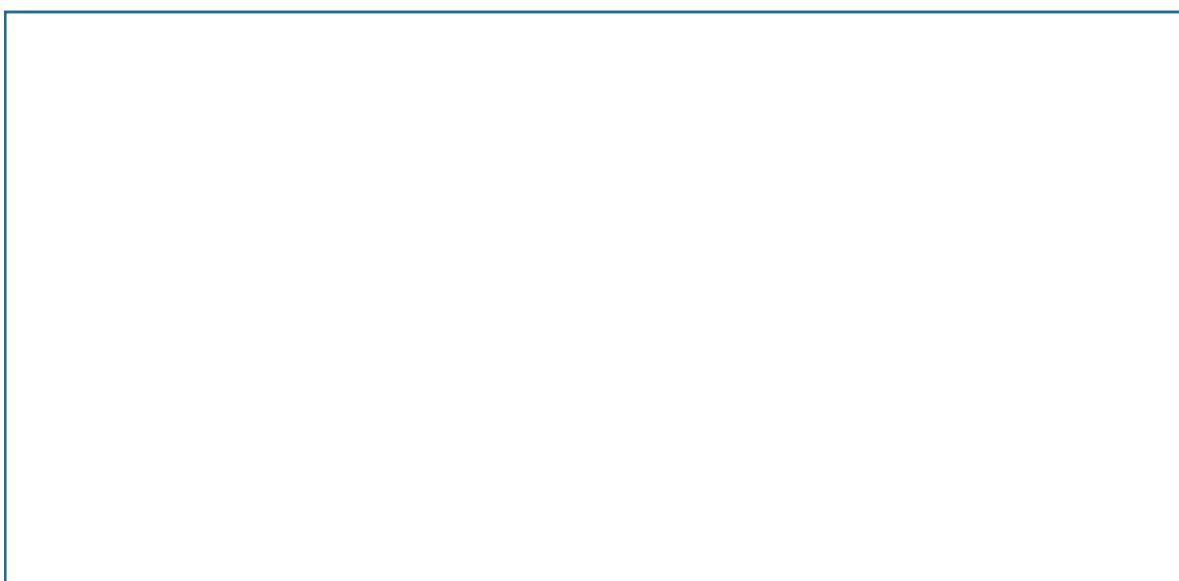
O material apresentado nesse texto traz algumas das atividades que compõem o capítulo de Introdução às Funções do projeto Livro Aberto de Matemática (www.umlivroaberto.com). Tal iniciativa é um esforço de professores da Educação Básica e Superior, assim como de entusiastas, para produzir coleções de livros didáticos de Matemática, voltadas para a Educação Básica, construídas de maneira colaborativa, fortemente baseadas em trabalhos de pesquisa em Educação e Ensino de Matemática.

A partir da abordagem do conteúdo, o projeto propõe, de acordo com a BNCC (2017), desenvolver no estudante as competências de investigação, reflexão, análise crítica, imaginação e criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas). A abordagem do conteúdo busca ser ao mesmo tempo **inovadora, consistente do ponto de vista matemático e atrativa** para o aluno.

O conteúdo é apresentado por meio de atividades que são sempre precedidas de comentários para o professor, neles são elencados os objetivos específicos de cada atividade além de recomendações e observações sobre a mesma.

Esse projeto é financiado pelo IMPA, pela OBMEP e pela Fundação Itaú Social. Aos recursos produzidos será atribuída a licença Creative Commons BY-SA¹ que garantirá livre visualização, distribuição e derivação do material. Outra característica desta proposta é a sua construção em constante contato com professores da Educação Básica de diversas regiões do Brasil.

Colorindo o mapa



¹ <https://creativecommons.org>

~ PARA O PROFESSOR

Objetivos Específicos

- Identificar, em um contexto, diferentes relações de dependência entre conjuntos de dados
- Identificar característica de univocidade (ou não) de uma relação.

Observações e Recomendações

- Nível de abstração *Processo/Ação*.
- Nem todos os estudantes vão usar o mesmo critério para a distribuição das cores. Incentive-os a usarem as quatro cores e, no momento da discussão do

A imagem ao lado, que foi retirada do aplicativo Google Maps®, exibe o trânsito na ponte Rio-Niterói e seus acessos em um determinado dia e hora. Várias informações podem ser observadas a partir dos elementos apresentados. Por exemplo, as cores nas vias informam a velocidade média dos veículos que trafegam por elas, conforme a legenda na parte inferior; a distância entre dois pontos quaisquer do mapa pode ser estimada usando a escala exibida no canto inferior direito. Gráficos como esse são produzidos a partir das relações entre diversas informações coletadas.

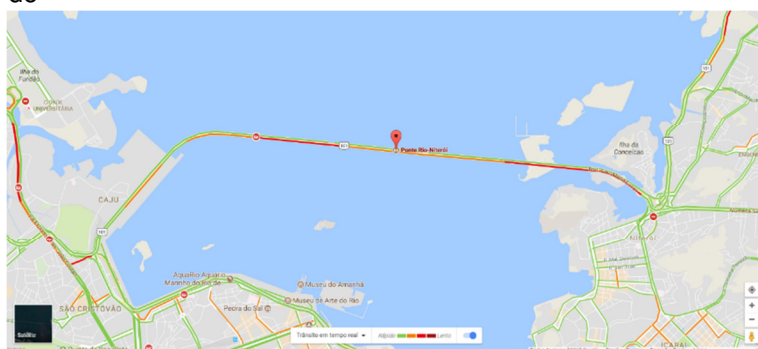
O quadro a seguir mostra os dados coletados sobre o tempo gasto pelos veículos (em média) para atravessar a ponte, ao longo de um dia.

Período do Dia	Tempo (min)	Cor	Velocidade Média (km/min)
5:00 - 7:00	13		
7:00 - 9:00	18		
9:00 - 11:00	15		
11:00 - 13:00	15		
13:00 - 15:00	16		
15:00 - 17:00	16		
17:00 - 19:00	23		
19:00 - 21:00	14		
21:00 - 23:00	13		

- a) Tomando como referência a ilustração anterior e utilizando a escala de cores a seguir, complete a terceira coluna da tabela com a cor que a ponte deveria estar colorida em cada período do dia destacado (supondo que toda a ponte esteja colorida da mesma cor). Descreva os

item (b), chame a atenção para o fato de não haver uma única resposta correta para o item (a).

- Deixamos a seu critério a escolha da unidade para a velocidade média. Os valores obtidos em km/min podem causar certa estranheza, uma vez que na maioria das situações cotidianas a velocidade é apresentada em km/h.
- Caso haja tempo, aproveite para fazer uma breve discussão sobre como a Matemática está em diferentes ferramentas tecnológicas que facilitam o nosso dia a dia, como o Google Maps®.



critérios que você utilizou na escolha de cada uma das cores e compare com os critérios dos seus colegas.

Rápido VERDE AMARELO VERMELHO VINHO Lento

- b) Você precisou associar uma mesma cor para períodos diferentes do dia. Por que?
- c) Sabendo que a ponte Rio-Niterói tem aproximadamente 13 km de extensão complete a quarta coluna da tabela com a velocidade média registrada em cada um dos períodos do dia.
- d) É possível que uma mesma velocidade média esteja associada a dois tempos de travessia diferentes? Por quê?

É função?

~ PARA O PROFESSOR

Objetivos Específicos

- Identificar, em um contexto, diferentes relações de dependência entre conjuntos de dados, reconhecendo quais são funções.
- Identificar a univocidade (ou não) de uma relação.

Observações e Recomendações

- Nível de abstração *Processo*.
- Esta é a oportunidade para reforçar as condições que garantem que uma relação é função, em particular, a univocidade.

No contexto da atividade anterior são observados diferentes conjuntos de dados: O conjunto dos tempos de travessia da ponte, $A = \{13, 14, 15, 16, 18, 23\}$; O conjunto das cores que compõem a escala, $B = \{Verde, Laranja, Vermelho, Vinho\}$; e o conjunto de velocidades obtidas C . Considere as diferentes relações de dependências estabelecidas entre esses conjuntos. Quais são funções?

Relação	É função?	Se não, por quê?
De A em B		
De B em A		
De A em C		
De C em A		
De B em C		
De C em B		

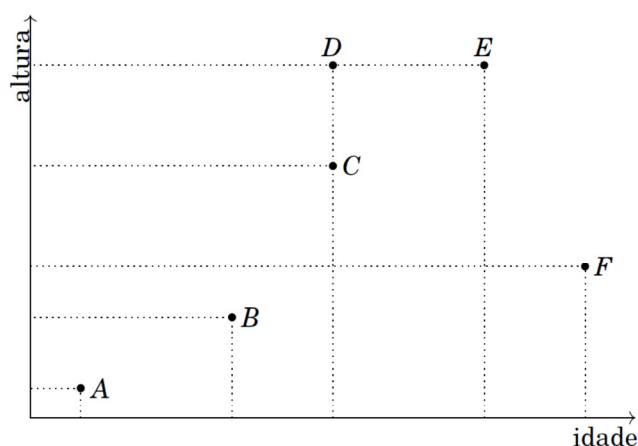
A família

~ PARA O PROFESSOR

Objetivos Específicos

- Identificar uma relação a partir de sua **Observações e Recomendações** representação no plano cartesiano.
- Identificar a univocidade (ou não) de uma relação a partir de sua representação no plano cartesiano.
- Nível de abstração *Processo*.
- No item (b) o objetivo é que os estudantes percebam que, como as pessoas representadas pelos pontos C (Márcia) e D (Júlio) têm a mesma idade, mas alturas diferentes, a relação apresentada no gráfico, que associa a idade com a altura nessa ordem, não é função

Cada ponto do gráfico a seguir representa uma das seguintes pessoas.



- Associe cada ponto do gráfico à pessoa correspondente.
- A relação expressa pelos pares ordenados (idade, altura) apresentados no gráfico é função? Por que?

*Adaptado de The Language of Functions and Graphs, Shell Centre for Mathematical Education Publications Ltd., 1985.

Por que não é função?

~ PARA O PROFESSOR

Objetivos Específicos

- Identificar em contextos mais variados por que uma dada relação não define uma função.

Observações e Recomendações

- Nível de abstração *Processo*.
- Procure incentivar os estudantes a se manifestem verbalmente, expressando seu entendimento sobre a relação

dada. Para a primeira relação, por exemplo, sugerimos que seja considerado, em um primeiro momento, o conjunto formado por todos os estudantes da sala. Possivelmente haverá estudantes sem irmãos e estudantes com mais de um irmão.

- No item (b) lembre com os alunos que a raiz quadrada é sempre um valor positivo. Por exemplo, $\sqrt{4} = 2$. Apesar de a equação $x^2 = 4$ ter duas soluções: 2 e -2 .

Para que uma relação de A em B seja uma função não pode haver:

- (I) Elementos no conjunto A sem correspondente em B ;
- (II) Ambiguidade na determinação de correspondente em B .

Determine se cada uma das relações apresentadas a seguir é função. Justifique suas respostas a partir das condições (I) e (II).

1. Seja P o conjunto de todas as pessoas e considere a relação de P em P , que a cada “pessoa” associa o “irmão da pessoa”.
2. Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais e considere a relação de \mathbb{R} em \mathbb{R} , que a cada “número real x ” associa “raiz quadrada do número real x ”.
3. Sejam \mathbb{R}^+ o conjunto dos números reais positivos e T o conjunto de todos os triângulos. Considere a relação de \mathbb{R}^+ em T que a cada “número real positivo x ” associa “triângulo de área x ”.

Imaginando gráficos

~ PARA O PROFESSOR

Objetivos Específicos

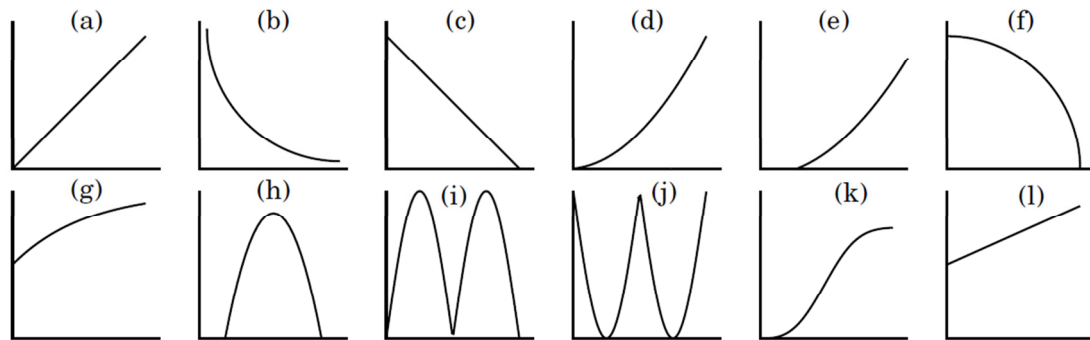
- Reconhecer o comportamento crescente e decrescente de funções a partir de suas representações dadas. Sugere-se, associar esse comportamento a situações cotidianas.

Observações e Recomendações

- Não existe resposta única para cada item. Certifique-se de que seus estudantes tenham argumentos consistentes sobre as suas escolhas. Você pode sugerir que eles compartilhem entre si os seus argumentos.

- É fundamental definir o que representa cada eixo, por exemplo, no item (I), se consideramos o tempo no eixo horizontal e a intensidade sonora no vertical, somente os gráficos (e) e (h) consideram o silêncio inicial, no entanto o gráfico (h) não leva em conta que “rapidamente todos estavam aplaudindo e se manifestando” e ainda há diminuição na intensidade sonora. Portanto, o gráfico (e) é o mais adequado. Agora, caso coloquemos no eixo horizontal a quantidade pessoas aplaudindo, os mais adequados são os gráficos (a) ou (d), eles passam pela origem e são crescentes.

Associe cada uma das situações apresentadas a seguir a um dos gráficos dados abaixo. Explique sua escolha e escreva, em cada um dos eixos, o que eles representam.



(I) Após um concerto houve um grande silêncio. Então uma pessoa na plateia começou a aplaudir. Gradualmente, as pessoas à sua volta também começaram a aplaudir de forma que rapidamente todos estavam aplaudindo.

(II) Se o preço cobrado pelo ingresso de um cinema for muito baixo, seu proprietário irá perder dinheiro. Por outro lado, se o valor cobrado for muito alto, poucas pessoas irão pagar e novamente o proprietário vai perder dinheiro. Um cinema deve, portanto, cobrar um preço moderado por seu ingresso de forma que seja lucrativo.

(III) Preços estão agora subindo mais lentamente do que em qualquer época nos últimos cinco anos.