Capítulo 11

Volumes e Áreas

11.1 Introdução

Vamos tratar agora dos volumes dos sólidos simples: prismas, pirâmides, cilindros, cones e a esfera. Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para exprimir essa "quantidade de espaço" através de um número, devemos compará-la com uma unidade; e o resultado dessa comparação será chamado de volume.

Por exemplo, podemos medir o volume de uma panela tomando como unidade uma xícara. Enchendo a xícara de água e vertendo na panela sucessivas vezes até que esta fique completamente cheia, estamos realizando uma medida de volume. É possível que o resultado dessa comparação seja um número inteiro – digamos: 1 panela = 24 xícaras – mas é muito provável que na última operação sobre ainda um pouco de água na xícara. E como determinaremos essa fração?

O exemplo mostra que esse processo pode ter alguma utilidade em casos simples onde se necessita apenas de um valor aproximado para o volume, mas não funciona, mesmo na prática, para inúmeros objetos. Ou porque são muito pequenos, ou porque são grandes demais, ou simplesmente porque são completamente sólidos. Ainda, a unidade xícara, que é inclusive muito utilizada nas receitas da boa cozinha, não é naturalmente adequada a um estudo mais geral. Vamos então combinar que:

a unidade de volume é o cubo de aresta 1

Para cada unidade de comprimento, temos uma unidade correspondente de volume. Se, por exemplo, a unidade de comprimento for o centímetro (cm), então a unidade correspondente de volume será chamada de centímetro cúbico (cm^3). Assim, o volume de um sólido S deve ser o número que exprima quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Mas, como esse sólido pode ter uma forma bastante irregular, não fica claro o que significa o número de vezes que um sólido contém esse cubo. Vamos então tratar de obter métodos que nos permitam obter fórmulas para o cálculo de volumes dos sólidos simples.

11.2 O Paralelepípedo Retângulo

O paralelepípedo retângulo (ou simplesmente um bloco retangular) é um poliedro formado por 6 retângulos. Ele fica perfeitamente determinado por três medidas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) e a sua altura (c).

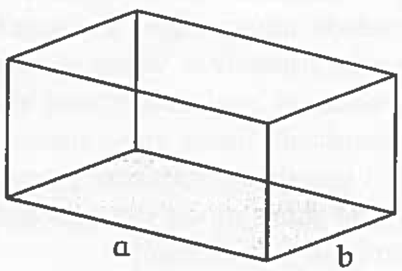

Fig. 11.1 - Paralelepípedo retângulo.

O volume desse paralelepípedo retângulo será representado por $V(a,b,c)$ e como o cubo unitário é um paralelepípedo retângulo cujos comprimento, largura e altura medem 1, então $V(1,1,1) = 1$.

Para obter o volume do paralelepípedo retângulo, devemos observar que ele é proporcional a cada uma de suas dimensões. Isto quer dizer que se mantivermos, por exemplo, constantes a largura e a altura e se multiplicarmos o comprimento por um número natural n, o volume ficará também multiplicado por n, ou seja,

$$V(na,b,c) = n\,V(a,b,c)$$

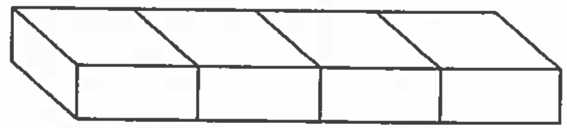

Figura 11.2

A figura 11.2 mostra 4 paralelepípedos retângulos iguais e justapostos, colados em faces iguais. Naturalmente, o volume total é 4 vezes maior que o volume de um deles.

Este fato, constatado para números naturais, também vale para qualquer número real positivo (veja Notas 1 e 2 no fim desta seção) e isto quer dizer que, mantidas constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Logo, sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$$\begin{aligned} V(a,b,c) &= V(a\cdot 1,b,c)\\ &= aV(1,b,c) = aV(1,b\cdot 1,c)\\ &= abV(1,1,c) = abV(1,1,c\cdot 1) = abcV(1,1,1)\\ &= abc\cdot 1\\ &= abc \end{aligned}$$

Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões. Em particular, se a face de dimensões a e b está contida em um plano horizontal, chamaremos essa face de *base* e a dimensão c de *altura*. Como o produto ab é área da base, é costume dizer que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.

Volume do paralelepípedo = (área da base) × (altura).

Nota 1. Utilizamos aqui um fato completamente intuitivo (mas que na verdade é um axioma) que é o seguinte. Se dois sólidos são tais que possuem em comum, no máximo pontos de suas cascas, então o volume da união de dois é a soma dos volumes de cada um.

Para explicar melhor, dizemos que um ponto P é interior a um sólido S quando existe uma esfera de centro P inteiramente contida em S. Quando P pertence a S mas não existe tal esfera, dizemos que P está na casca de S (ou na superfície de S). Isto é o que nos permite usar termos como "justapor" ou "colar" dois sólidos. Ainda, permite dizer que se um sólido está dividido em vários outros, então seu volume é a soma dos volumes de suas partes.

Nota 2. O conceito de proporcionalidade é extremamente importante na Matemática elementar. Em particular na geometria, existem ocasiões em que certos resultados são facilmente verificados quando as medidas são números naturais (ou mesmo racionais), mas o que se torna um problema é estender esses mesmos resultados para números reais. O que resolve essa constrangedora situação é o teorema fundamental da proporcionalidade, que diz o seguinte:

Teorema. Sejam x e y grandezas positivas. Se x e y estão relacionadas por uma função crescente f tal que para todo natural n, $f(nx) = nf(x)$, então para todo real r, tem-se que $f(rx) = rf(x)$.

Em palavras mais simples, dizemos que duas grandezas positivas x e y são proporcionais quando, se a primeira for multiplicada por um número natural n, então a segunda fica também multiplicada por n. Esse teorema nos garante que, neste caso, se a primeira grandeza for multiplicada por um número real r, a segunda grandeza também fica multiplicada por r. A demonstração deste belo teorema pode ser encontrada no livro "Meu Professor de Matemática" de Elon Lages Lima na página 127.

Não estamos aqui estimulando o professor do segundo grau que faça essa demonstração em sala de aula. Muito pelo contrário. Estamos dizendo que se o professor der, para os estudantes do segundo grau, alguma justificativa de um importante resultado

utilizando números naturais, ou mesmo racionais, esse procedimento não é um erro, deve ser feito dessa forma, e estará sendo adequado ao nível de desenvolvimento dos seus alunos. Por outro lado, o professor ficará consciente que, mesmo não podendo fazer a demonstração completa, estará fornecendo argumentos corretos, e deixando a generalização para um estágio posterior.

11.3 O Princípio de Cavalieri

Conseguimos estabelecer a fórmula do volume de um paralelepípedo retângulo, mas não é fácil ir adiante sem ferramentas adicionais. Uma forma confortável de prosseguir é adotar como axioma um resultado conhecido como o Princípio de Cavalieri.

Antes de enunciá-lo, observe uma experiência que se pode fazer para os alunos. Ponha em cima da mesa, uma resma de papel. Estando ainda perfeitamente bem arrumada, ela é um paralelepípedo retângulo (fig. 11.3a) e, portanto, tem um volume que podemos calcular. Encostando uma régua nas faces laterais, podemos transformar o paralelepípedo retângulo em um outro oblíquo (fig. 11.3b) ou, usando as mãos, poderemos moldar um sólido bem diferente (fig. 11.3c).

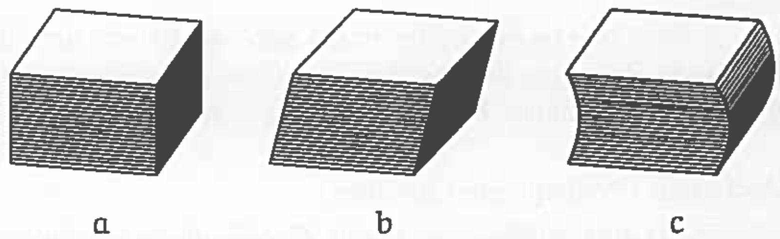

Fig. 11.3 - Pilhas de papel.

Sabemos que esses três sólidos têm volumes iguais mas ainda nos faltam argumentos para explicar esse fato que intuitivamente percebemos. De uma forma mais geral, suponha que dois sólidos A e B estão apoiados em um plano horizontal e que qualquer outro plano também horizontal corte ambos segundo seções de mesma área. O Princípio de Cavalieri afirma que o volume de A é igual ao volume de B.

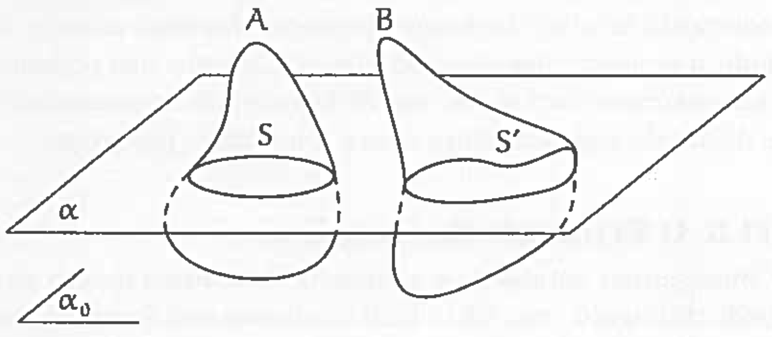

Figura 11.4

Se imaginarmos os dois sólidos fatiados no mesmo número de fatias muito finas, todas com mesma altura, duas fatias correspondentes com mesma área terão, aproximadamente, mesmo volume. Tanto mais aproximadamente quanto mais finas forem. Sendo o volume de cada sólido a soma dos volumes de suas fatias, concluímos que os dois sólidos têm volumes iguais. Repare ainda que o exemplo da resma de papel mostra um caso particular desse argumento, onde os três sólidos possuem, cada um, 500 fatias, todas iguais.

É claro que os exemplos acima não constituem uma demonstração do Princípio de Cavalieri mas dão uma forte indicação de que ele é verdadeiro. Podemos então aceitar o axioma seguinte:

Axioma (Princípio de Cavalieri)

São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.

Esta é a ferramenta que vamos utilizar para encontrar os volumes dos demais sólidos simples.

Nota 3. No ensino da Geometria existem alguns resultados que não podemos demonstrar de forma satisfatória e que, naturalmente, causam incômodo ao professor. Os principais são os seguintes: o Teorema de Tales (das paralelas), a área do quadrado, o volume do paralelepípedo e o Princípio de Cavalieri. Para os três primeiros temas, o professor poderá oferecer uma demonstração parcial utilizando números naturais (ou mesmo racionais) que deve satisfazer a maioria dos alunos. Essa atitude não é condenável, muito pelo contrário. O professor estará justificando importantes resultados de acordo com o nível de desenvolvimento dos seus alunos, mas saberá que o resultado geral estará garantido pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade (veja Nota 2 deste capítulo). Existem outras opções e uma delas é adotar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade (como fato que poderá ser demonstrado mais tarde) e a partir dele, demonstrar a área do retângulo, do triângulo e daí o Teorema de Tales. Para esse caminho, o leitor poderá consultar o artigo "Usando Áreas" na RPM nº 21, pág. 19. Foi esse o caminho que utilizamos aqui para obter o volume do paralelepípedo e não há dúvida que esse procedimento satisfaz a nossa necessidade imediata mas transfere a dificuldade para outro lugar. Não tem jeito. Existem obstáculos no percurso do ensino da Geometria e o professor, consciente das dificuldades, deverá optar pelo rumo a tomar. No caso do Princípio de Cavalieri a situação é diferente. A sua demonstração envolve conceitos avançados de Teoria da Medida e portanto só podemos oferecer aos alunos alguns exemplos. Mas, cremos que esses exemplos sejam suficientes para que possamos adotar sem traumas o Princípio de Cavalieri como axioma.

11.4 O Prisma

Com o Princípio de Cavalieri, podemos obter sem dificuldade o volume de um prisma. Imaginemos um prisma de altura h, e cuja base seja um polígono de área A, contido em um plano horizontal. Construímos ao lado um paralelepípedo retângulo com altura h e de forma que sua base seja um retângulo de área A.

Suponha agora que os dois sólidos sejam cortados por um outro plano horizontal, que produz seções de áreas A_1 e A_2 no prisma e no paralelepípedo, respectivamente. Ora, o paralelepípedo é também um prisma e sabemos que em todo prisma, uma seção paralela à base é congruente com essa base. Logo, como figuras congruentes têm mesma área, temos que $A_1 = A = A_2$ e, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm mesmo volume. Como o volume do paralelepípedo é Ah, o volume do prisma é também o produto da área de sua base por sua altura.

Volume do prisma = (área da base) × (altura).

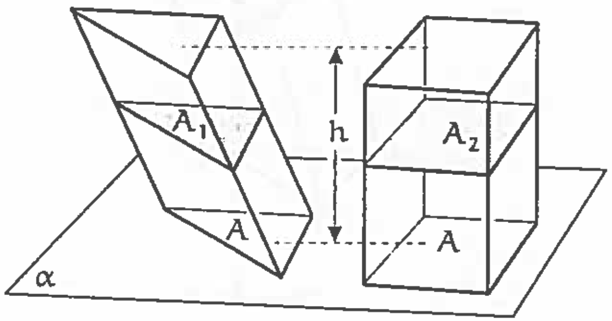

Figura 11.5

11.5 A Pirâmide

Para obter o volume da pirâmide, precisamos de resultados adicionais. Em particular, o que realmente importa é ter a certeza que se o vértice de uma pirâmide se move em um plano paralelo à base, o volume dessa pirâmide não se altera. Para isso, vamos examinar o que ocorre quando uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base.

A figura 5.6 a seguir mostra uma pirâmide de vértice V, base ABC (triangular apenas para simplificar o desenho) e altura H. Um plano paralelo a ABC, distando h do vértice V, produziu nessa pirâmide uma seção DEF.

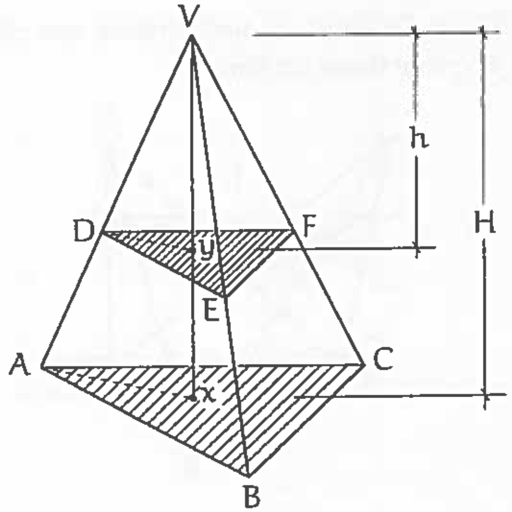

Figura 11.6

Vamos agora citar dois fatos importantes com respeito à situação acima.

1) A seção e a base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{h}{H}$.

2) A razão entre áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

O primeiro fato foi demonstrado no Capítulo 7 deste livro. A demonstração do segundo pode ser encontrada em diversos livros de Matemática do segundo grau. Para uma referência mais avançada, recomendamos o livro "Medida e Forma em Geometria" do professor Elon Lages Lima editado pela SBM, que trata também dos mesmos assuntos que estamos desenvolvendo aqui.

Passamos agora a um teorema preparatório para o que nos permitirá obter o volume da pirâmide.

Teorema. Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume.

A figura a seguir mostra duas pirâmides de mesma base ABC (novamente triangular apenas para simplificação do desenho), vértices V_1 e V_2 e com mesma altura H. Um plano paralelo ao plano (ABC) e distando h dos vértices das pirâmides, produziu seções S_1 e S_2 nas duas pirâmides.

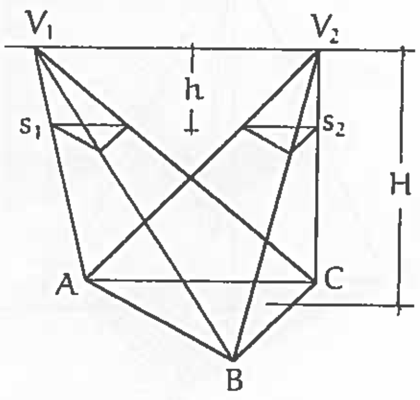

Figura 11.7

Seja A a área da base ABC e sejam A_1 e A_2 as áreas das seções S_1 e S_2, respectivamente. Pelos argumentos que citamos, temos que:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

de onde se conclui que $A_1 = A_2$. Pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm mesmo volume, como queríamos demonstrar.

O fato que podemos mover o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo à sua base sem alterar o seu volume é a chave para a demonstração do volume da pirâmide de base triangular. Veremos isto no teorema seguinte.

Teorema. O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

A demonstração deste teorema é elementar mas requer atenção. Para facilitar o entendimento, vamos convencionar uma notação especial. Trataremos de diversos tetraedros e como em um tetraedro qualquer face pode ser considerada uma base, vamos convencionar o seguinte. Se em um tetraedro de vértices A, B C e D, imaginamos a face ABC como base e o ponto D como vértice

dessa pirâmide, vamos representá-lo por $D - ABC$. Ainda, o volume desse tetraedro será representado por

$$V(D - ABC) = V(B - ACD) = \dots, \text{etc},$$

dependendo de qual face estamos considerando como base.

Consideremos então um prisma triangular cujas bases são os triângulos ABC e $A'B'C'$, como mostra a figura 11.8.

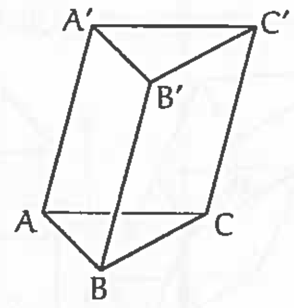

Figura 11.8

Seja A a área de ABC e seja h a altura do prisma. Como sabemos, seu volume é Ah. Vamos agora, dividir esse prisma em três tetraedros: $A - A'B'C'$, $B' - ACC'$ e $B' - ABC$, como mostram as figuras a seguir.

Sejam V_1, V_2 e V_3 os volumes respectivos dos três tetraedros citados e seja V o volume do prisma. Pelo teorema anterior, sabemos que o volume de uma pirâmide não se modifica quando, mantendo a base fixa, movemos o vértice em um plano paralelo a essa base. Tendo isto em mente podemos concluir:

$$\begin{aligned} V_1 &= V(A - A'B'C') = V(A - A'BC') \\ &= V(A - A'BC) = V(A' - ABC) \\ V_2 &= V(B' - ACC') = V(B - ACC') = V(C' - ABC) \\ V_3 &= V(B' - ABC) \end{aligned}$$

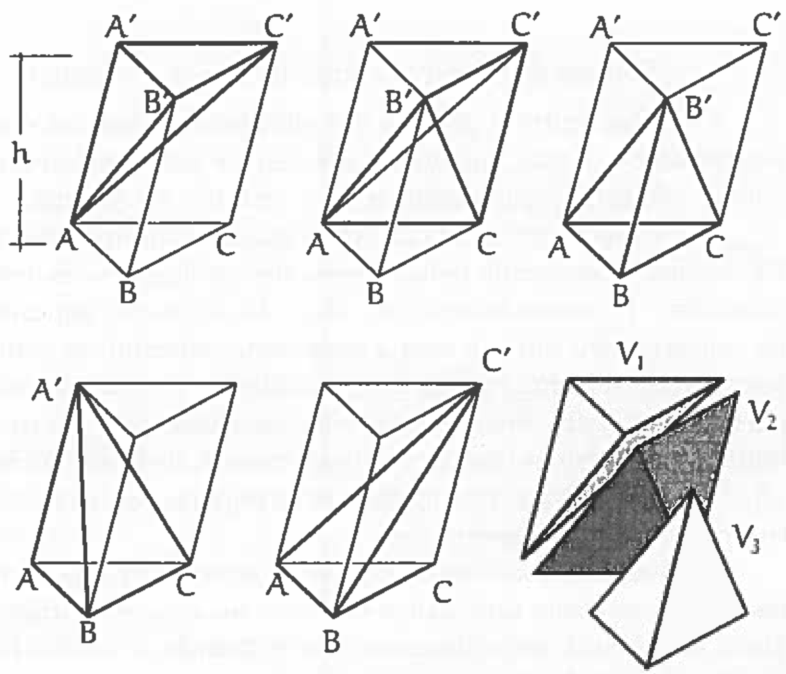

Fig. 11.9 - Decompondo o prisma em tetraedros de mesmo volume.

Concluímos então que o volume do prisma é igual à soma dos volumes de três tetraedros:

$$A' - ABC\,,\, B' - ABC \text{ e } C' - ABC\,,$$

com a mesma base do prisma e com alturas iguais a do prisma. Logo, cada um deles tem volume igual a um terço do volume do prisma. Demonstramos então que o volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Estamos agora muito próximos do resultado geral. O teorema a seguir estende o resultado obtido para qualquer pirâmide.

Teorema. O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Para justificar, observe que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Essa divisão é feita dividindo-se a base em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide.

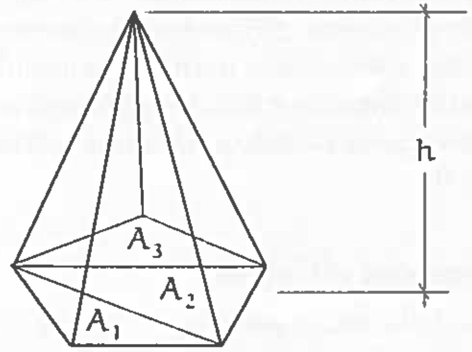

Figura 11.10

Suponha agora que a pirâmide tenha altura h e que sua base, de área A, tenha sido dividida em n triângulos de áreas

$$A_1, A_2, \ldots, A_n.$$

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos que seu volume é:

$$V = \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + \cdots + \frac{1}{3}A_nh$$

$$V = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)h$$

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

como queríamos demonstrar. Fica então estabelecido que:

$$\text{volume da pirâmide} = \frac{1}{3}\,(\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

A obtenção dos volumes do prisma e da pirâmide demanda considerável esforço. É conveniente que após esses resultados, o professor os explore em diversos sólidos particulares, em particular, prismas e pirâmides regulares. Para encontrar os elementos necessários para o cálculo do volume de um desses poliedros, será freqüentemente necessário encontrar triângulos convenientes, aplicar relações métricas e calcular áreas, propiciando uma revisão dos resultados importantes da geometria plana.

Quando prismas e pirâmides são apresentados ao aluno do segundo grau, a motivação natural é o cálculo dos volumes. Entretanto, paralelamente a isso, diversas outras relações métricas e propriedades desses poliedros devem ser estudadas, como fizemos no Capítulo 9.

11.6 Cilindros e Cones

No cilindro, toda seção paralela à base, é congruente com essa base. Esse fato, permite concluir, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume do cilindro é o produto da área de sua base pela sua altura.

Se o cilindro tem altura h e base de área A contida em um plano horizontal, imaginamos um prisma qualquer (ou em particular um paralelepípedo retângulo) de altura h, com base de área A contida no mesmo plano. Se um outro plano horizontal secciona os dois sólidos segundo figuras de áreas A_1 e A_2, então $A_1 = A = A_2$ e por conseqüência, os dois têm mesmo volume. Logo, o volume do cilindro é também o produto da área da base pela altura.

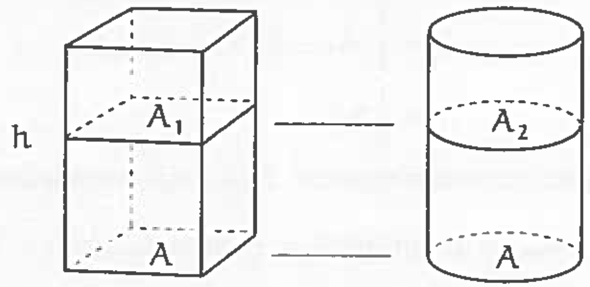

Figura 11.11

$$\text{Volume do cilindro} = (\text{área da base}) \times (\text{altura})$$

A relação entre o prisma e o cilindro é a mesma que entre a pirâmide e o cone, ou seja, o primeiro é caso particular do segundo. Optamos por demonstrar o volume do prisma e depois estender o resultado a um caso mais geral, o cilindro, porque esse é o caminho percorrido pela maioria dos professores da escola secundária. E concordamos com eles. O aluno do segundo grau, no seu primeiro contato com a geometria espacial, se sente mais seguro quando compreende bem resultados obtidos em situações particulares, para depois estendê-los em casos mais gerais. O matemático profissional gosta, freqüentemente, de fazer o inverso, ou seja, demonstrar um resultado geral e depois citar os casos particulares em que o mesmo vale.

O volume do cone segue o mesmo caminho trilhado anteriormente. Se um cone tem altura H e base de área A contida em um plano horizontal, consideramos uma pirâmide de altura H e base de área A contida nesse mesmo plano.

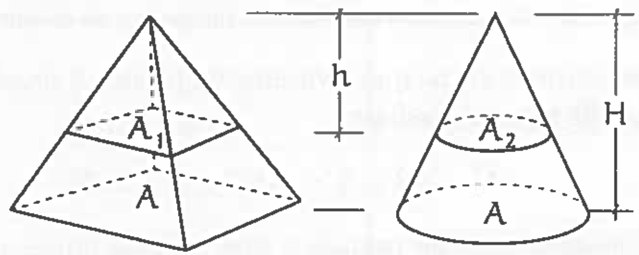

Figura 11.12

Se um outro plano horizontal, distando h do vértice desses sólidos secciona ambos segundo figuras de áreas A_1 e A_2, então:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

ou seja, $A_1 = A_2$. O Princípio de Cavalieri nos garante que os dois sólidos têm mesmo volume e portanto concluímos que o volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

$$\text{Volume do cone} = \frac{1}{3}\,(\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

Os casos mais interessantes para os alunos são os cilindros e cones retos de base circular porque eles estão mais relacionados com os objetos do cotidiano. Ainda, nesses objetos, a superfície lateral pode ser obtida de forma simples.

A superfície lateral de um cilindro reto de raio R e altura h, pode ser desenrolada e transformada em um retângulo de base $2\pi R$ e altura h. A área lateral do cilindro é igual à área desse retâgulo, que vale $2\pi Rh$.

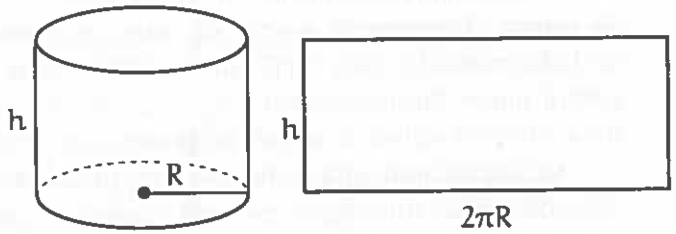

Fig. 11.13 - Área lateral do cilindro $= 2\pi Rh$.

A superfície lateral de um cone reto de raio R e geratriz g, pode ser desenrolada e transformada em um setor de raio g cujo arco tem comprimento $2\pi R$. A área A desse setor é igual à área lateral do cone e para calculá-la, usaremos apenas uma elementar regra de três. Diremos que a área A desse setor está para a área do círculo de raio g, assim como o comprimento do arco $2\pi R$ está para o comprimento total da circunferência $2\pi g$. Com isso, concluímos que a área lateral do cone reto vale πRg.

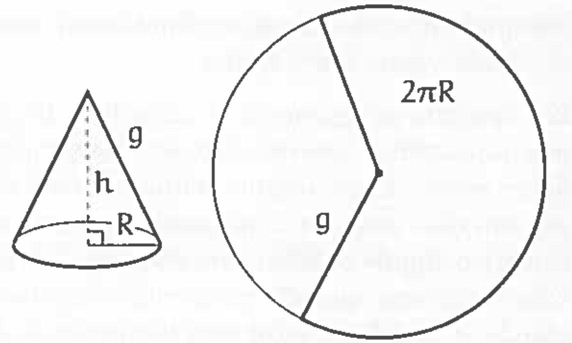

Fig. 11.14 - Área lateral do cone $= \pi Rg$.

O leitor deve reparar que, ao utilizar a regra de três, estamos usando o fato que a área de um setor circular é diretamente proporcional ao comprimento do arco que ele subtende (veja Nota 2 deste capítulo).

11.7 Atividades para Sala de Aula

Cilindros e cones retos de base circular devem ser associados às suas esferas inscrita e circunscrita. Além disso, inúmeras embalagens de produtos são cilíndricas, o que fornece diversos problemas interessantes. Vamos listar algumas atividades que podem ser desenvolvidas com os alunos.

1. O *cilindro equilátero* (isto é, o cilindro circular reto em que a altura é igual ao diâmetro da base) possui uma interessante propriedade. De todos os cilindros de mesmo volume, o cilindro equilátero é o que possui a menor área total. Assim, se o industrial deseja comercializar seu produto em embalagens cilíndricas que gastem um mínimo de material em sua fabricação, ele deve preferir o cilindro equilátero. É o caso, por exemplo das latas de leite condensado. Elas são cilindros equiláteros. A demonstração dessa propriedade requer o uso de cálculo e, portanto, não está ainda acessível aos alunos do segundo grau. Entretanto, o professor poderá calcular a área de um cilindro equilátero e depois

calcular a área de um outro cilindro com mesmo volume, para que os alunos vejam que é maior.

2. Quando se desenrola a superfície lateral de um cone, obtemos um setor. É interessante investigar o valor do ângulo central desse setor. Esse ângulo define a *forma* do cone. Se o cone tiver um raio pequeno comparado com sua altura (tipo chapéu de bruxa), o ângulo do setor será pequeno. Se, por outro lado, o raio do cone for grande quando comparado com sua altura (tipo chapéu de chinês), o ângulo do setor será também grande. O professor poderá demonstrar, utilizando também uma regra de três que o ângulo desse setor é, em radianos, igual a $2\pi R/g$ e com isso mostrar que no cone equilátero (cone que tem a geratriz igual ao diâmetro da base), esse ângulo é de 180°.

11.8 A Esfera

O volume da esfera será obtido também como aplicação do Princípio de Cavalieri. Para isso, devemos imaginar um certo sólido, de volume conhecido e tal que seções produzidas por planos horizontais na esfera e nesse sólido tenham áreas iguais. Repare que em uma esfera de raio R, uma seção que dista h do centro é um círculo de área $\pi(R^2 - h^2)$. Mas esta é também a área de uma coroa circular limitada por circunferências de raios R e h.

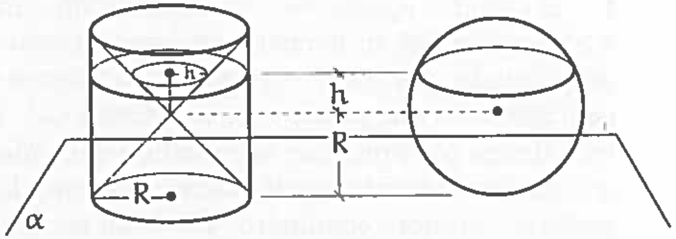

Figura 11.15

Consideremos então uma esfera de raio R apoiada em um plano horizontal e, ao lado, um cilindro equilátero de raio R com

base também sobre esse plano. Do cilindro, vamos subtrair dois cones iguais, cada um deles com base em uma base do cilindro e vértices coincidentes no centro do cilindro. Este sólido C (chamado *clépsidra*) é tal que qualquer plano horizontal distando h do seu centro (ou do centro da esfera, o que é o mesmo), produz uma seção que é uma coroa circular cujo raio externo é R e cujo raio interno é h. Logo, o volume da esfera é igual ao de C.

O volume de C é o volume do cilindro de raio R e altura 2R subtraído de dois cones de raio R e altura R. Isso dá:

$$\pi R^2\, 2R - 2\frac{1}{3}\pi R^2\, R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

que é o volume da esfera.

$$\text{Volume da esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Adotando o Princípio de Cavalieri, pudemos calcular o volume da esfera. Entretanto, a área da esfera não pode ser obtida pelo método sugerido para o cilindro e para o cone. A superfície da esfera não é "desenvolvível", ou seja, não é possível fazer cortes nela e depois aplicá-la sobre um plano sem dobrar nem esticar.

Qualquer que seja o método que imaginarmos para obter a área da esfera, em algum momento precisaremos de uma "passagem ao limite". Entretanto, para justificar o valor $4\pi R^2$ para a área da esfera ao aluno do segundo grau, existem processos que, apesar de não constituírem uma demonstração, tornam esse resultado bastante aceitável. Um deles, está no livro Medida e Forma em Geometria, pág. 81 o outro pode ser o seguinte. Suponha a esfera de raio R, dividida em um número n muito grande de regiões, todas com área e perímetro muito pequenos. Como se a esfera estivesse coberta por uma rede de malha muito fina. Cada uma dessas regiões, que é "quase" plana se n for muito grande, será base de um cone com vértice no centro da esfera. Assim, a esfera ficará dividida em n cones, todos com altura aproximadamente igual a R (tanto mais aproximadamente quanto menor for a base do cone).

Se A é a área da esfera e $A_1, A_2, \ldots, A_n$, são as áreas das diversas regiões, temos:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}A_1R + \frac{1}{3}A_2R + \cdots + \frac{1}{3}A_nR$$
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)R$$
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}AR$$
$$A = 4\pi R^2$$

É preciso deixar claro que esses cálculos não demonstram nada. Afinal, usamos a palavra "aproximadamente" muitas vezes e com significado pouco preciso. No ensino do segundo grau, atitudes desse tipo são corretas. Se não podemos demonstrar certo resultado, deveremos mostrar argumentos que, pelo menos os façam plausíveis, aceitáveis, e dizer honestamente aos alunos, que a demonstração requer o uso de Cálculo ou de outras ferramentas que eles vão aprender depois. Afinal de contas, a forma de ensinar e os argumentos que podemos utilizar, dependem do nível de desenvolvimento dos estudantes. Como dizia o professor Zoroastro, a verdade nem sempre pode ser dita de uma vez só.

11.9 Atividades para Sala de Aula

Utilizamos a palavra esfera com dois significados. Ora ela representa a superfície, a casca do sólido. Ora ela representa o interior. Não há problema nisso. Repare que na geometria plana, o mesmo já ocorria. Por exemplo, a palavra quadrado era utilizada tanto para representar a união dos quatro lados (o bordo) quanto para o interior. Os estudantes deverão compreender o significado de acordo com a situação que está sendo estudada.

Sugerimos algumas atividades relacionadas com áreas e volumes na esfera.

1. Para praticar as fórmulas de área e de volume, é interessante demonstrar o seguinte fato descoberto por Arquimedes: se uma esfera está inscrita em um cilindro (reto) então a razão entre as áreas desses sólidos é igual à razão entre seus volumes.

2. O professor pode também pedir aos alunos para calcular a área e o volume de um fuso esférico (isto é, a região delimitada por dois meridianos). É simples convencê-los de que tanto a área como o volume de um fuso esférico é proporcional ao ângulo desse fuso. Portanto, se α é a medida em graus do ângulo de um fuso em uma esfera de raio R, a área desse fuso será

$$\frac{\alpha}{360}4\pi R^2$$

e seu volume será

$$\frac{\alpha}{360} \times \frac{4\pi R^2}{3}.$$

3. É bom aproveitar as fórmulas da área e do volume da esfera (em que aparecem, respectivamente, R^2 e R^3) para reforçar o fato de que as razões entre áreas e volumes de figuras semelhantes são iguais, respectivamente, ao quadrado e ao cubo da razão de semelhança. O professor pode, por exemplo, perguntar aos alunos que relação existe entre as massas de duas bolas de gude, uma com raio igual ao dobro do da outra.