

Modelos Matemáticos de Quimiotaxia

FABIO A. C. C. CHALUB
Universidade de Viena

Pre-história da Biomatemática

Leonardo de Pisa (1202): Suponha que um casal de coelhos dê à luz a um novo casal de coelhos todos os meses a partir da idade de dois meses. Quantos casais existirão em um ano?

Veja o link abaixo

Figure 1: Disponível em

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html>

Veja o link abaixo

Figure 2: Disponível em

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html>

Kepler (1571-1639):

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n .$$

Veja o link abaixo

Figure 3: Disponível em <http://www.brantacan.co.uk/fibonacci.htm>

Veja o link abaixo

Figure 4: Disponível em <http://www.brantacan.co.uk/fibonacci.htm>

Em muito menor frequência outras seqüências também aparecem:

- 3, 1, 4, 5, 9, ...
- 5, 2, 7, 9, 16, ...

Biomatemática no Século XX

Instrumentos matemáticos mais comuns:

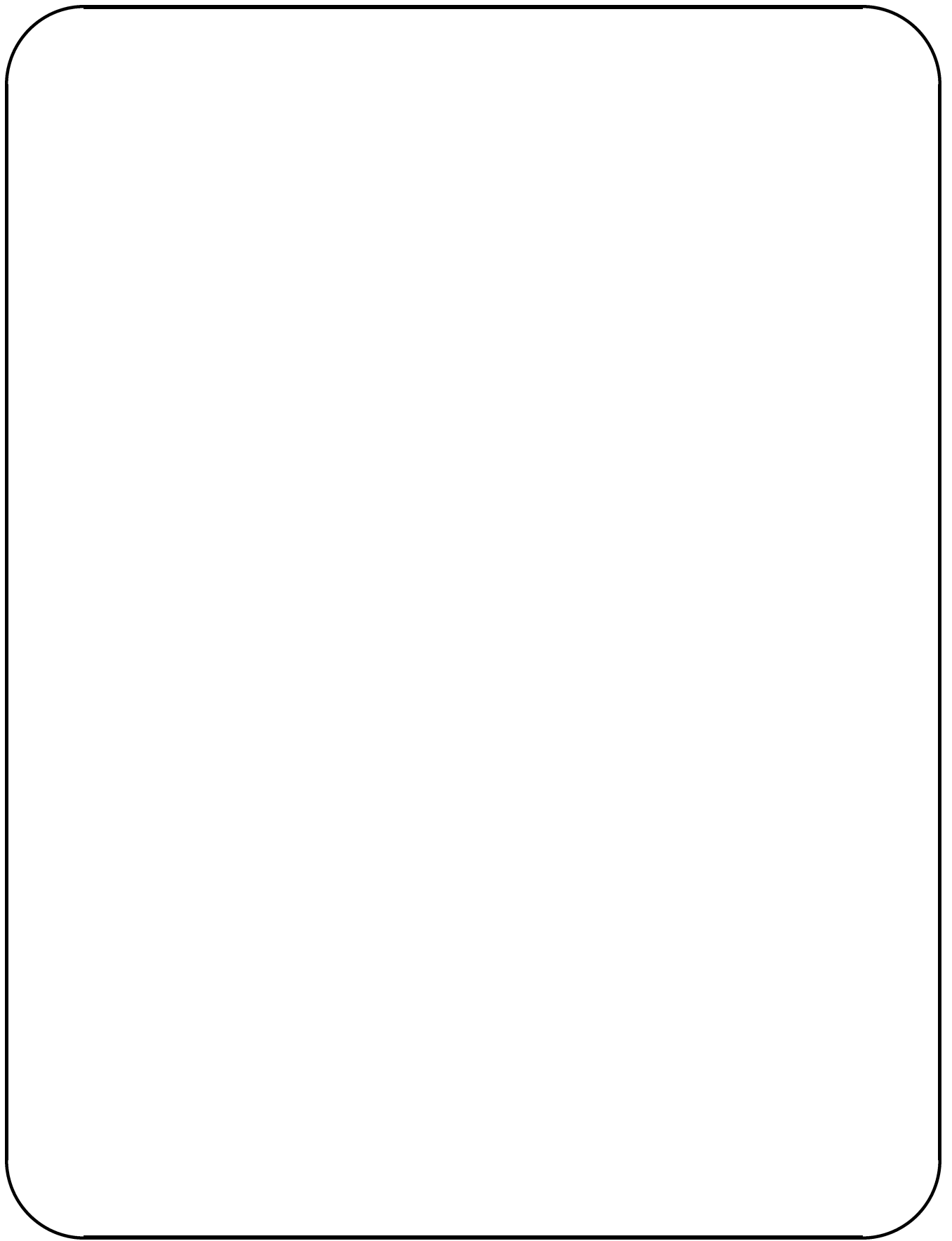
- Equações diferenciais ordinárias (ecologia, epidemiologia, imunologia, . . .).
- Equações diferenciais parciais (modelos espacialmente inhomogêneos, crescimento de tumores, dinâmica de fluidos biológicos, quimiotaxia, . . .).
- Equações diferenciais estocásticas (modelos com incerteza, ecologia).
- Combinatória, probabilidade (genética)
- Teoria de Jogos (evolução)

Pré-formacionismo

Von Leenwenhoek (1677): Invenção do microscópio.

Veja o link abaixo

Figure 5: Nicholas Hartsoecker. Disponível em
<http://zygote.swarthmore.edu/fert1.html>



Veja o link abaixo

Figure 6. Desenvolvimento do embrião humano. Disponível em

<http://anatomy.med.unsw.edu.au/cbl/embryo/embryo.htm>

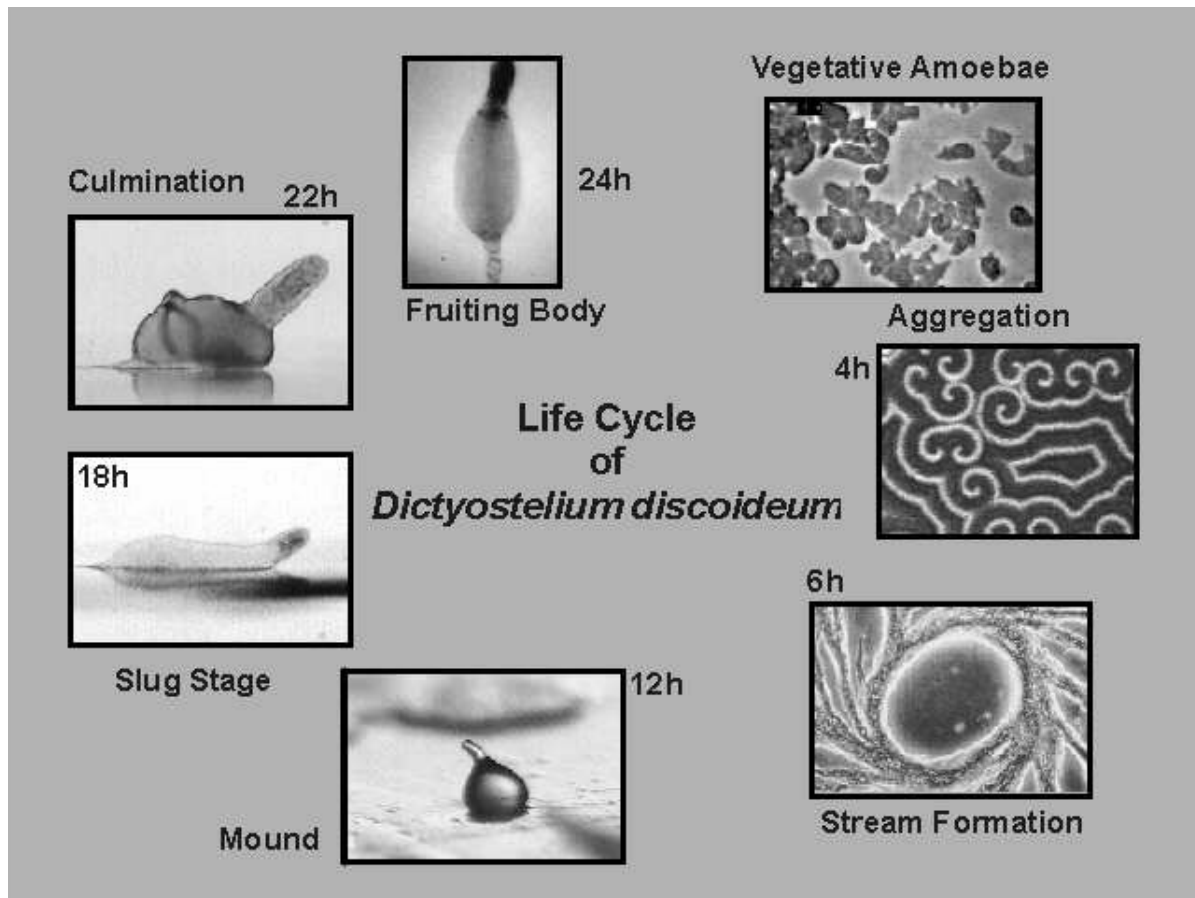


Figure 7: Ciclo de vida *Dictyostelium discoideum*. Cortesia de Florian Seigert and Kees Wiejer (Zoologisches Institut München Ludwig-Maximilians-Universität München). Disponível em <http://www.zi.biologie.uni-muenchen.de/zoologie/dicty/dicty.html>

Derivação do Modelo de Keller-Segel

Baseado em “Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability”, Evelyn Keller and Lee Segel, *J. Theor. Biol.* (1970) **26**, 399–415.

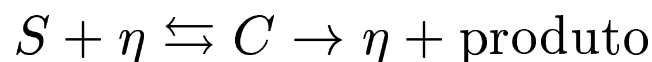
Variáveis:

- $\rho(x, t)$ = densidade de amebas.
- $S(x, t)$ = densidade de cAMP (acrasina).
- $\eta(x, t)$ = densidade de fosfodiesterase (acrasinase).
- $c(x, t)$ = densidade de um certo composto instável.

Por hipótese estamos trabalhando em dimensão $n = 2$.

Deve-se implementar matematicamente os seguintes fatos:

- cAMP (substância mediadora da agregação) é produzida pelas amebas a uma taxa $f(S)$ por ameba.
- A cAMP é degradada por uma enzima extracelular chamada fosfodiesterase produzida a taxa $g(S, \eta)$ por ameba.
- cAMP e fosfodiesterase reagem formando um certo composto instável C que decai imediatamente em fosfodiesterase e um produto degenerado.



- cAMP, fosfodiesterase e o composto difundem de acordo com a lei de Fick.
- A concentração espaço-temporal da ameba se altera por um processo de difusão aleatória e por quimiotaxia, na direção positiva do gradiente de cAMP.

Para cada substância cuja densidade é dada por a^i , temos um fluxo J^i , um termo de criação/destruição Q^i de forma que

$$\frac{\partial a^i}{\partial t} = Q^i - \nabla \cdot J^i .$$

Por conservação da massa temos que

$$Q^{\rho} = 0 .$$

Para obter Q^S , Q^{η} e Q^c devemos considerar a produção pelas amebas e os termos da reação química.

$$Q^S = -k_1 S \eta + k_{-1} c + \rho f(S) ,$$

$$Q^{\eta} = -k_1 S \eta + (k_{-1} + k_2) c + \rho g(S, \eta) ,$$

$$Q^c = k_1 S \eta - (k_1 + k_2) c .$$

Os fluxos são dados pelas seguintes expressões

$$J^\rho = D_1 \nabla S - D_2 \nabla \rho ,$$

$$J^S = -D_S \nabla S ,$$

$$J^\eta = -D_\eta \nabla \eta ,$$

$$J^c = -D_c \nabla c .$$

Os coeficientes de difusão são dados por

$$D_i = D_i(\rho, S, \eta, c) .$$

Assim o sistema completo de Keller-Segel se escreve:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (D_1 \nabla S) + \nabla \cdot (D_2 \nabla \rho) ,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -k_1 S \eta + k_{-1} c + \rho f(S) + D_S \Delta S ,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -k_1 S \eta + (k_{-1} + k_2) c + \rho g(S, \eta) + D_\eta \Delta \eta ,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k_1 S \eta - (k_1 + k_2) c + D_c \Delta c .$$

Este modelo pode ser simplificado.
Introduziremos duas aproximações
biologicamente razoáveis:

- O composto C está em equilíbrio químico:

$$k_1 S \eta - (k_{-1} + k_2) c = 0 .$$

(Hipótese de Haldane)

- A concentração de enzima (tanto na forma livre quanto na forma ligada) é constante:

$$\eta + c = \eta_0 .$$

Resolvendo o sistema acima, encontramos

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + K \rho} ,$$

$$K = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} .$$

Assim o sistema-se escreve:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot (D_1 \nabla \rho) + \nabla(D_2 \nabla S) , \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -k(S)S + \rho f(S) + D_S \Delta S .\end{aligned}$$

Na equação acima

$$k(S) = \frac{\eta_0 k_2 K}{1 + KS} .$$

No sistema acima:

- as amebas difundem aleatoriamente e realizam movimento quimiotático;
- o quimioatraente descrito por S difunde, é criado pelas amebas a uma taxa f e decai a uma taxa k .

Para validar o modelo, é necessário que possa haver agregação. Antes do início da agregação as amebas se distribuem de maneira uniforme e começam a se agregar em torno de certas instabilidades.

Uma possível solução do sistema de Keller-Segel é dado por $\rho = \rho_0$ e $S = S_0$, onde ρ_0 e S_0 são constantes e

$$\rho_0 f(S_0) = k(S_0)S_0 .$$

Considere uma solução próxima do equilíbrio:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \bar{\rho}(x, t) , & |\bar{\rho}| &\ll \rho_0 , \\ S &= S_0 + \bar{S}(x, t) , & |\bar{S}| &\ll S_0 .\end{aligned}$$

Ignorando termos de ordem quadrática em $\bar{\rho}$ e \bar{S} , re-escrevemos o sistema:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} &= -D_1(\rho_0, S_0)\Delta \bar{S} + D_2(\rho_0, S_0)\Delta \bar{\rho} , \\ \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} &= -\bar{k}\bar{S} + \rho_0 f'(S_0)\bar{S} + f(S_0)\bar{\rho} + D_S\Delta \bar{S} ,\end{aligned}$$

onde

$$\bar{k} = k(S_0) + S_0 k'(S_0) .$$

Procuraremos soluções da forma

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \hat{\rho} \cos(q_1 x + q_2 y) e^{\sigma t} , \\ \bar{S} &= \hat{S} \cos(q_1 x + q_2 y) e^{\sigma t} ,\end{aligned}$$

onde $\hat{\rho}$, \hat{S} , q_1 , q_2 e σ são constantes.

Definimos

$$\begin{aligned}q^2 &= q_1^2 + q_2^2 , \\ F &= f'(S_0)\rho_0 - \bar{k} - q^2 D_\rho .\end{aligned}$$

Os possíveis valores de σ são soluções de

$$\sigma^2 - \sigma(F - q^2 D_2) - (q^2 f(S_0)D_1 + q^2 D_2 F) = 0 .$$

As raízes são reais e são ambas negativas se

$$F < -\frac{f(S_0)D_1}{D_2} .$$

Isto pode ser re-escrito como uma condição de instabilidade:

$$\frac{D_1(\rho_0, S_0)S_0}{D_2(\rho_0, S_0)\rho_0} + \frac{\rho_0 f'(S_0)}{\bar{k}} > 1 .$$

Com o resultado anterior podemos considerar o modelo de Keller-Segel um *bom* modelo para o início da agregação. De forma mais específica chamaremos de modelo de Keller-Segel o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \nabla \cdot (D \nabla \rho - \chi \rho \nabla S) , \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= D_S \Delta S + \varphi(\rho, S) ,\end{aligned}$$

onde $D = D(S)$, $\chi = \chi(S)$ e $D_S = D_S(S)$.

A função $\varphi(\rho, S)$ descreve a produção e decaimento do quimioatraente. Tipicamente

$$\varphi = \alpha \rho - \beta S .$$

Blow up

Seguiremos “Self-similar blow up for a reaction-diffusion system”, M.A.Herrero, E. Medina e J.J.L. Velázquez, *J. Comp. Appl. Math* **97** (1998) 99–119.

Considere o sistema de Keller-Segel

$$\begin{aligned}\partial_t \rho &= \Delta \rho - \chi \nabla \cdot (\rho \nabla S) , \\ \Delta S &= -\rho ,\end{aligned}$$

onde χ é constante positiva.

Obs: a segunda equação pode ser obtida a partir de

$$\partial_t S = D \Delta S + \alpha \rho - \beta S$$

fazendo um re-escalonamento, tomando o limite de difusão rápida para a substância química e aproximando $\rho - 1 \approx \rho$, o que é verdadeiro para ρ muito grande.

Dizemos que existe blow up se

$$\lim_{t \rightarrow T} (\|\rho(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|S(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}) = \infty .$$

Caso $T < \infty$ dizemos que existe blow up em tempo finito.

Suponha, inicialmente, que o problema acima esteja definido em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, onde Ω é uma bola de raio R em torno da origem. Imponha condições de fronteira:

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = \frac{\partial S}{\partial n} = 0 \quad x \in \partial\Omega .$$

Então

- Não existe blow up para $n = 1$;
- Para $n = 2$ blow up de soluções radialmente simétricas ocorre se e somente se:

$$\frac{1}{\pi R^2} \int_{\Omega} \rho_0(x) dx > \frac{8}{\chi} .$$

- Para $n > 3$ blow up pode ocorrer com qualquer densidade inicial.

No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^3$ temos o seguinte resultado:

- Considere $n = 3$. Para qualquer $T > 0$ existe seqüência δ_n com $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ e uma seqüência de soluções radiais do sistema de Keller-Segel $(\rho_n(r, t), S_n(r, t))$ que apresentam blow up em $r = 0$ e $t = T$ tais que ρ_n é auto-similar e

$$\rho_n(r, t) \sim \left(\frac{8\pi}{\chi} + \delta_n \right) \frac{1}{4\pi r^2}, \quad r \rightarrow 0.$$

Veja que neste caso

$$M(r, T) = \int_{|x| \leq r} u_n(x, t) dx \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0,$$

ou seja, não há concentração de massa na origem.

- Para o caso $n = 2$ temos que não existe solução radial, auto-similar tal que $M(r, T) < \infty$ quando $r \rightarrow 0$.

Seja $n = 3$, considere soluções do sistema de Keller-Segel $(\rho(r, t), S(r, t))$.

Então

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho_{rr} + \frac{2\rho_r}{r} - \frac{\chi}{r^2} (r^2 \rho S_r)_r , \\ 0 &= S_{rr} + \frac{2\rho_r}{r} + u .\end{aligned}$$

Defina uma função de massa:

$$M(r, t) = \int_{|x| \leq r} \rho dx = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr .$$

Isto transforma o sistema acima em:

$$M_t = M_{rr} - \frac{2M_r}{r} + \chi M \frac{M_r}{4\pi r^2} .$$

Defina as variáveis auxiliares:

$$\begin{aligned}y &= r(T - t)^{-1/2} , \\ \tau &= -\log(T - t) , \\ M(r, t) &= (T - t)^{1/2} \Phi(y, \tau) .\end{aligned}$$

Re-escrevemos:

$$\Psi_\tau = \Psi_{yy} - \left(\frac{2}{y} + \frac{y}{2} \right) \Psi_y + \frac{\Psi}{2} + \chi \Psi \frac{\Psi_y}{4\pi y^2} .$$

Procurando soluções da forma

$$\Psi(y, \tau) = yG(y, \tau) ,$$

$$G_\tau = G_{yy} - \frac{yG_y}{2} - \frac{2G}{y^2} + \chi G \frac{G + yG_y}{4\pi y^2} .$$

Para soluções auto-similares, devemos impor

$$G(y, \tau) = G(y) .$$

$$G'' - \frac{yG'}{2} - \frac{2G}{y^2} + \frac{\chi}{4\pi y^2} (yGG' + G^2) = 0 .$$

Uma solução explícita é dada por

$$G = \frac{8\pi}{\chi} .$$

Em geral existe solução tal que

$$G(y) \rightarrow C \text{ para todo } C , \quad y \rightarrow \infty .$$

Modelo de Othmer-Dunbar-Alt

Baseado em “The Diffusion Limit of Transport Equations derived from Velocity-Jump Process”, Thomas Hillen and Hans Othmer, *Siam J. Appl. Math.* **61**(3) 751–775 (2000) e “The Diffusion Limit of Transport Equations II: Chemotaxis Equations”, Hans Othmer e Thomas Hillen, *Siam J. Appl. Math.* **62**(4) 1222–1250 (2002).

Defina:

- $f(x, v, t)$ = densidade de células no ponto x com velocidade v no instante t .
- $T[S](x, v, v', t)$ = taxa de alteração da velocidade de v' para v , no ponto (x, t) na presença do quimioatraente dado por S .
- V é o conjunto de todas as velocidades admissíveis. Por hipótese V é compacto e invariante por rotação.

Equação

$$\begin{aligned} & \partial_t f(x, v, t) + v \cdot \nabla f(x, v, t) \\ &= \int_V (T[S](x, v, v', t) f(x, v', t) \\ & \quad - T[S](x, v', v, t) f(x, v, t)) dv' . \end{aligned}$$

Notação

$$\begin{aligned} f &= f(x, v, t) , \\ f' &= f(x, v', t) , \\ T[S] &= T[S](x, v, v', t) , \\ T^*[S] &= T[S](x, v', v, t) . \end{aligned}$$

Equação

$$\partial_t f + v \cdot \nabla f = \int_V (T[S]f' - T^*[S]f) dv .$$

Além da equação para a densidade de células devemos considerar a equação para a substância química. Assim o sistema a ser considerado é:

$$\begin{aligned}\partial_t f + v \cdot \nabla f &= \int_V (T[S]f' - T^*[S]f)dv , \\ \rho &= \int_V f dv , \\ \partial_t S &= D_S \Delta S + \alpha \rho - \frac{S}{\tau_S} .\end{aligned}$$

Podemos re-escalonar o sistema:

$$t' = t/t_0 , \quad x' = x/x_0 , \quad v' = v/v_0 ,$$

com

$$t_0 = \tau_0/\varepsilon^2 , \quad x_0 = v_0\tau_0/\varepsilon .$$

Além disto:

$$\begin{aligned}T[S] &= \frac{T_\varepsilon[S/S_0]}{\tau_0 v_0^3} , \\ f_0 &= \frac{\rho_0}{v_0^3} , \\ \rho_0 &= \frac{S_0 D_S}{\alpha x_0^2} .\end{aligned}$$

O sistema é re-escrito

$$\begin{aligned}\delta \partial_t S_\varepsilon &= \Delta S_\varepsilon + \rho_\varepsilon - \delta \frac{t_0}{\tau_S} S_\varepsilon , \\ \varepsilon^2 \partial_t f_\varepsilon + \varepsilon v \cdot \nabla_x f_\varepsilon &= -\mathcal{T}_\varepsilon[S_\varepsilon](f_\varepsilon) ,\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\rho_\varepsilon &= \int_V f_\varepsilon dv , \\ \mathcal{T}_\varepsilon[S](f) &= \int_V (T_\varepsilon^*[S]f - T_\varepsilon[S]f') dv , \\ \delta &= \frac{v_0^2 \tau_0}{D_S} .\end{aligned}$$

δ é a razão entre a difusão celular e da substância química. Suporemos a difusão química muito maior, e portanto $\delta = 0$.

Logo, escrevemos:

$$\Delta S_\varepsilon = -\rho_\varepsilon .$$

Expansão Formal

Referência: FACCC, P. Markowich, B. Perthame, C. Schmeiser, “Kinetic Models for Chemotaxis and their drift-diffusion Limits”.

Devemos estudar o sistema

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \partial_t f_\varepsilon + \varepsilon v \cdot \nabla f_\varepsilon &= \int_V (T_\varepsilon[S_\varepsilon]f'_\varepsilon - T_\varepsilon^*[S_\varepsilon]f_\varepsilon) dv , \\ \rho_\varepsilon &= \int_V f_\varepsilon dv , \\ \Delta S_\varepsilon &= \rho_\varepsilon ,\end{aligned}$$

sujeito a condições iniciais

$$f_\varepsilon(x, v, 0) = f^0(x, v)$$

no limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$.

Considere

$$T_\varepsilon[S] = T_0[S] + \varepsilon T_1[S] + O(\varepsilon^2) ,$$

$$f_\varepsilon = f_0 + \varepsilon f_1 + O(\varepsilon^2) ,$$

$$S_\varepsilon = S_0 + \varepsilon S_1 + O(\varepsilon^2) .$$

Coloque tais expansões no sistema e iguale termo a termo em potências de ε .

Exemplo 1: Considere

$$T_\varepsilon[S] = T_0[S] + \varepsilon T_1[S] ,$$

$$T_0[S](x, v, v', t) = \lambda[S](x, t)F(v) ,$$

$$T_1[S](x, v, v', t) = a(S)v \cdot \nabla S - b(S)v' \cdot \nabla S ,$$

com $F(v) > 0$ tal que

$$T_0^*[S]F = T_0[S]F'$$

e

$$\int_V F(v)dv = 1 \quad \int_V vF(v) = 0 .$$

Suponha também que $\lambda[S](x, t) \geq \gamma$.

Em ordem ε^0 temos

$$0 = \mathcal{T}_0(f_0) ,$$

$$\rho_0 = \int_V f_0 ,$$

$$\Delta S_0 = \rho_0 .$$

Das duas primeiras equações obtemos:

$$f_0 = \rho_0 F(v) .$$

Em ordem ε^1 temos

$$\begin{aligned} v \cdot \nabla f_0 &= -(\mathcal{T}_1(f_0) + \mathcal{T}_0(f_1)) , \\ \rho_1 &= \int_V f_1 , \\ \Delta S_1 &= \rho_1 . \end{aligned}$$

Definimos:

$$\begin{aligned} D[S] &= \frac{1}{\lambda[S]} \int_V v \otimes v F(v) dv , \\ \Gamma[S] &= -\frac{1}{\lambda[S]} \int_V v \mathcal{T}_1[S](F) dv = \chi[S] \nabla S , \\ \chi[S] &= -\frac{(b(S)\mu(V) \int_V |v|^2 F dv + a(S) \int_V |v|^2 dv)}{3\lambda[S_0]} , \end{aligned}$$

onde $\mu(V) = \int_V dv$. Multiplicando a primeira equação por v e integrando em V obtemos:

$$\lambda[S_0] D[S_0] \nabla \rho_0 = \lambda[S_0] \chi[S_0] \nabla S_0 \rho_0 - \lambda[S_0] \int_V v f_1 dv .$$

Escrevemos

$$\int_V v f_1 dv = \chi[S_0] \nabla S_0 \rho_0 - D[S_0] \nabla \rho_0 .$$

Em ordem ε^2 e integrando em V obtemos

$$\partial_t \rho_0 + \nabla \cdot \int_V v f_1 dv = 0 ,$$

ou seja:

$$\partial_t \rho_0 = \nabla \cdot (D[S_0] \nabla \rho_0 - \chi[S_0] \nabla S_0 \rho_0) ,$$

que junto com a equação

$$\Delta S_0 = \rho_0$$

é o modelo de Keller-Segel.

Exemplo 2: Suponha uma função suave $\psi(S, \tilde{S})$, positiva, não-decrescente no segundo argumento, definida em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ tal que

$$0 < \psi_{\min} \leq \psi(S, \tilde{S}) \leq \alpha_1 \tilde{S} + \alpha_2 ,$$

onde $\alpha_{1,2}$ são constantes reais positivas.

Considere

$$T_\varepsilon[S](x, v, v', t) = \alpha_+ \psi(S(x, t), S(x + \varepsilon v, t)) + \\ \alpha_- \psi(S(x, t), S(x - \varepsilon v', t)) .$$

Temos então:

$$T_0[S] = (\alpha_+ + \alpha_-) \psi(S, S) , \\ T_1[S] = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{S}}(S, S) (\alpha_+ v - \alpha_- v') \cdot \nabla S .$$

A partir destas expressões podemos ver que o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ deste modelo é a equação de Keller-Segel

$$\partial_t \rho_0 = \nabla \cdot (D[S_0] \nabla \rho_0 - \chi[S_0] \nabla S_0 \rho_0) ,$$

com

$$D[S] = \frac{1}{3(\alpha_+ + \alpha_-)\psi(S, S)\mu(V)^2} \int_V |v|^2 dv ,$$
$$\chi[S] = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{S}}(S, S) \frac{1}{3\psi(S, S)\mu(V)} \int_V |v|^2 dv .$$

Para $\psi(S, \tilde{S}) = \Psi(\tilde{S} - S)$, $\alpha_+ = 1$, $\alpha_- = 0$,
obtemos D e χ constantes (modelo clássico de
Keller-Segel).

Escolhendo $\psi(S, \tilde{S}) = \Psi(S)\tilde{\Psi}(\tilde{S})$ podemos
reproduzir um modelo arbitrário de Keller-Segel,
desde que:

$$\tilde{\Psi}(S) = \exp\left(3\frac{\mu(V)}{\int_V |v|^2 dv} \int_{S_0}^S \chi[S'] dS'\right),$$

$$\Psi(S) = \frac{\int_V |v|^2 dv}{3\mu(V)^2 \tilde{\Psi}(S) D[S]}.$$

Sempre que $0 < \psi_{\min} \leq \psi(S, \tilde{S}) \leq \alpha_1 \tilde{S} + \alpha_2$
temos existência global.

Semelhanças e diferenças entre os dois exemplos:

- Ambos os modelos convergem formalmente para o modelo de Keller-Segel.
- O segundo exemplo tem existência global — não apresenta blow up em tempo finito.

Resultados

Teorema:

Considere $f^0 \in L^1_+ \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times V)$ e suponha que existe C tal que

$$0 \leq T[S](x, v, v', t) \leq C(1 + S(x+v, t) + S(x-v', t)) .$$

Então o modelo cinético possui solução global

$$f \in L^\infty((0, \infty); L^1_+ \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times V)),$$

$$S \in L^\infty((0, \infty); L^p(\mathbb{R}^3)), \quad 2 \leq p \leq \infty.$$

Demonstração:

$$S = S^L + S^S ,$$

$$S^L = \rho * \left(\frac{1}{4\pi|x|} \mathbb{I}_{|x| \geq 1} \right) ,$$

$$S^S = \rho * \left(\frac{1}{4\pi|x|} \mathbb{I}_{|x| \leq 1} \right) .$$

$$\|S^L(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{4\pi} \|f^0\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times V)} .$$

$$\|f(\cdot, \cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3 \times V)} \leq \|f^0(\cdot, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3 \times V)} +$$

$$C \left(1 + \sup_{0 < s < t} \|S^S(\cdot, s)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right) \int_0^t \|f(\cdot, \cdot, s)\|_{L^p(\mathbb{R}^3 \times V)} ds$$

$\forall p \geq 2$

Para $2 \leq p < 3$

$$\frac{1}{|x|} \mathbb{I}_{|x| \leq 1} \in L^p(\mathbb{R}^3)$$

Desigualdade de Young:

$$\|S^S(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq c \|f^0\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times V)} \cdot$$

Gronwall: Existe uma cota superior para

$$\|f(\cdot, \cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3 \times V)} \quad p \in [2, 3),$$

dependendo apenas de f^0 , p e t .

Young:

$$\|S^S(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f(\cdot, \cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \times V)} \leq C(t),$$

com $C \in L_{loc}^\infty([0, \infty))$.

Faça $p = \infty$ e aplique a desigualdade de Gronwall novamente.

Teorema:

Suponha $F \in L^\infty(V)$ uma distribuição positiva de velocidades, com $\int_V F dv = 1$ e $\int_V v F dv = 0$.

Sejam ϕ_ε^S e ϕ_ε^A as partes simétrica e anti-simétrica de $T[S]F'$, respectivamente.

Suponha que existe $q > 3$, $\gamma > 0$ e uma função não decrescente $\Lambda \in L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty))$, tal que

$$f^0 \in \mathcal{X}_q := L_+^1(\mathbb{R}^3 \times V) \cap L^q \left(\mathbb{R}^3 \times V; \frac{dx dv}{F^{q-1}} \right),$$

$$\phi_\varepsilon^S[S] \geq \gamma(1 - \varepsilon \Lambda(\|S\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)})) F F',$$

$$\int_V \frac{\phi_\varepsilon^A[S]^2}{F \phi_\varepsilon^S[S]} dv' \leq \varepsilon^2 \Lambda(\|S\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)}).$$

Além disto suponha que para famílias S_ε uniformemente limitadas (quando $\varepsilon \rightarrow 0$) em $L_{loc}^\infty([0, \infty); C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3))$, com $0 < \alpha \leq 1$, tais que S_ε e ∇S_ε convergem para S_0 e ∇S_0 respectivamente em $L_{loc}^p(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ para $p > 3/2$, temos que

$$\begin{aligned} f_\varepsilon &\rightarrow \rho_0 F && \text{em } L^\infty((0, t^*); \mathcal{X}_q) \text{ fraca }^*, \\ S_\varepsilon &\rightarrow S_0 && \text{em } L_{loc}^p(\mathbb{R}^3 \times (0, t^*)), \quad 3 < p < \infty, \\ \nabla S_\varepsilon &\rightarrow \nabla S_0 && \text{em } L_{loc}^p(\mathbb{R}^3 \times (0, t^*)), \quad \frac{3}{2} < p < \infty. \end{aligned}$$

Os limites são soluções fracas do sistema de Keller-Segel submetido as condições iniciais:

$$\rho_0(t = 0) = \int_V f^0 dv.$$

Conclusões

- Apresentamos modelos matemáticos de quimiotaxia, particularmente mostramos um modelo macroscópico (Keller-Segel) e outro microscópico (Othmer-Dunbar-Alt).
- Mostramos condições precisas para a convergência do modelo microscópico para o macroscópico.
- Mostramos como núcleos específicos podem ser escolhidos no modelo de Othmer-Dunbar-Alt de forma compatível com modelos macroscópicos dados e sem que haja blow up em tempo finito no modelo microscópico, mas com blow up em tempo finito no modelo macroscópico.