Propriedades das soluções de uma equação de Schrödinger não linear de alta ordem

Xavier Carvajal Paredes

Abstract

We study properties of solutions for a higher order nonlinear Schrödinger equation. When the coefficients appearing in the linear terms of the equation are smooth functions of time, we establish local well-posedness for the associated initial value problem (IVP) with data in Sobolev spaces of order greater or equal than one fourth. We also consider the equation with constant coefficients and show that the local solutions of the IVP can be extended globally in Sobolev spaces of index greater than five ninth. Other problem we consider here is related to unique continuation principles. In particular, we prove that solutions of the IVP with compact support in two different times have to be zero. Finally, we investigate whether or not the results obtained for the IVP are the best possible and ill-posedness issues for the problem.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Dios por haberme permitido conseguir este objetivo anhelado.

A mi orientador Felipe Linares por las múltiples discusiones, sugerencias, ideas, por su grande paciencia y amistad.

A mis padres Faustino y Teresa, a mi hermano Andrés por su ayuda y motivación desde la época del colegio y la universidad, El fué el directo responsable por mi inclinación hacia la Matemática, a mi hermano Pablo por su apoyo moral y material, a mis hermanos Lidia, Julio, José y Jesús que tanto los extraño.

A una mujer muy especial Patricia Melo por su amor y cariño, sin ella no hubiese conseguido sobrevivir estos últimos años.

A los profesores Carlos Isnard y Rafael Iório por sus enseñanzas durante varios cursos recibidos, que sin lugar a dudas me incentivaron y me facilitaron realizar mi tesis. A la profesora Marcia Scialom, a los profesores Gustavo Perla, Jorge Zubelli y André Nachbin.

A Mahendra Panthee, Adan Corcho y José de Arimatéia por las discuciones e intercambio de ideas, a mis amigos del IMPA Bladismir Ruiz, Fabio Brochero, Aniura Milanes, Borys Alvarez, Sergio Muñoz, Jaime Orrillo. A mi amigo Luiz Salazar, a la Señora Oneide, al pastor José Rabelo, a Marcio, Marcos, Sumaya Jaimes, Rodrigo y a todos los amigos que no menciono pero que mi agradecimiento es el mismo.

Al IMPA por haberme permitido estudiar aquí.

Al CNPQ por la beca concedida durante la Maestria y el Doctorado.

Dedico este trabajo a mis padres.

Xavier Carvajal Paredes
Rio de Janeiro, Brasil
14 de agosto de 2002.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho, estudaremos várias propriedades das soluções da equação

$$\partial_t u + i\alpha\partial_x^2 u + \beta\partial_x^3 u + i\gamma|u|^2 u + \delta|u|^2\partial_x u + \epsilon u^2\partial_x\overline{u} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

onde u é uma função a valores complexos, $\gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{C}$ são constantes e α, β podem ser constantes ou funções reais dependendo de t.

Antes de começar a expor os resultados deste trabalho, daremos uma descrição do modelo considerado.

A. Hasegawa e Y. Kodama, em [17] e [34], propuseram um modelo para a propagação de um pulso numa fibra ótica, eles também estudaram os efeitos de dispersão de alta ordem, a propagação de um N-soliton ótico numa fibra e um método de perturbação para analisar as soluções do modelo. Eles obtiveram a seguinte equação normalizada:

$$i\frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + |q|^2 q + i\epsilon\Big\{\beta_1\frac{\partial^3 q}{\partial T^3} + \beta_2\frac{\partial}{\partial T}(|q|^2 q) + \beta_3 q\frac{\partial}{\partial T}(|q|^2)\Big\} = 0, \tag{2}$$

onde $|q| \sim |E_0|$, E_0 é a amplitude do campo elétrico do pulso ótico, $Z \sim \epsilon^2 z$, z é a direção de propagação da onda, $T \sim \epsilon(t - z/v_g)$, t é o tempo, v_g a velocidade de grupo da onda, $|\epsilon| << 1$, o quarto termo com $\beta_1 \in \mathbb{C}$ toma em conta a dispersão de alta ordem e o quinto e sexto termos com $\beta_2 \in \mathbb{R}$, $\beta_3 \in \mathbb{C}$ os efeitos não lineares.

A equação acima é chamada de equação de Hasegawa Kodama (HK).

Nosso objetivo é estudar algumas propriedades das soluções de (1). Abordaremos primeiro o problema de Cauchy ou Problema de Valor Inicial (PVI).

$$\begin{cases} \partial_t u + i\alpha(t)\partial_x^2 u + \beta(t)\partial_x^3 u + i\gamma|u|^2 u + \delta|u|^2\partial_x u + \epsilon u^2\partial_x\overline{u} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3}$$

com $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^1([-T_0, T_0], \mathbb{R})$, $\gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{C}$ são constantes, estudaremos (3) nos espaços de Sobolev $\mathbf{H}^{\mathbf{s}}(\mathbb{R})$. Nossa definição de localmente bem posto contém: existência, unicidade, a propriedade de persistência (para o dado inicial $u_0 \in X$, a solução $u(t)$ em qualquer tempo $t \in [-T, T]$ pertence ao mesmo espaço X e descrive uma curva contínua em X) e continuidade da solução como uma função do dado inicial (isto é, continuidade da aplicação $u_0 \mapsto u(t)$ de X em $\mathcal{C}([-T, T]; X)$). Quando $T = T(\|u_0\|_X) < \infty$ diremos que o problema de Cauchy é localmente bem posto em X. Se T pode ser tomado arbitrario diremos que o problema de Cauchy é globalmente bem posto. Se alguma das hipóteses na definição de localmente bem posto é omitida, diremos que o problema de Cauchy não é bem posto ou é mal colocado. Também estudaremos propriedades relativas ao suporte das soluções de (1).

Como casos particulares de (1) temos:

A equação de Schrödinger cúbica não linear (NLS), ($\alpha(t) = \mp 1$, $\beta(t) = 0$, $\gamma = -1$, $\delta = \epsilon = 0$)

$$iu_t \pm u_{xx} + |u|^2 u = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

O problema de Cauchy para (4) tem sido estensivamente estudado. O melhor resultado local para (4) em uma dimensão foi obtido para dados em $\mathbf{H^s}(\mathbb{R})$, $s \geq 0$, veja [6, 15, 55]. Kenig, Ponce e Vega em [31] provaram que este resultado é o melhor possível no sentido de que a aplicação dado-solução, $u_0 \mapsto u(t)$, não é uniformemente contínua para $s < 0$. O melhor resultado global para o problema de Cauchy (4) foi obtido para dados em $\mathbf{H^s}(\mathbb{R})$, $s \geq 0$, pois as soluções preservam a norma $\mathbf{L^2}$.

A equação de Schrödinger não linear com derivada ($\alpha(t) = -1$, $\beta(t) = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 2\lambda$, $\epsilon = \lambda$) é dada por

$$iu_t + u_{xx} + i\lambda(|u|^2 u)_x = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

a equação (5) foi estudada por muitos autores, veja por exemplo [21, 45, 51, 53, 54]. O melhor resultado para o problema de Cauchy de (5) foi encontrado por Takaoka em [51], para dados em $\mathbf{H^s}(\mathbb{R})$, $s \geq 1/2$. Biagioni-Linares em [1] provaram que este resultado é o melhor possível no sentido de que a aplicação dado-solução, $u_0 \mapsto u(t)$, não é uniformemente contínua para $s < 1/2$ (veja também [52]). Colliander et al. em [7], mostraram que o resultado local pode ser estendido globalmente para dados ϕ em $\mathbf{H^s}(\mathbb{R})$, $s \geq 1/2$, desde que

$$\|\phi\|_{\mathbf{L^2}} < \sqrt{2\pi/|\lambda|}. \tag{6}$$

Quando $\alpha(t)$ é uma constante real e $\beta(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos o caso particular da conhecida equação de Schrödinger não linear mista

$$u_t = i\alpha u_{xx} + \lambda(|u|^2)_x u + g(u), \quad x, t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

onde g satisfaz condições apropriadas. Ozawa e Tsutsumi em [45] provaram que para qualquer $\rho > 0$, existe uma constante positiva $T(\rho)$ dependendo somente de ρ e g, onde o PVI associado à (7) é localmente bem posto para dados ϕ_0 em $\mathbf{H^{1/2}}$, desde que

$$\|\phi_0\|_{\mathbf{H^{1/2}}} \leq \rho.$$

Outro caso interessante de (1) é quando $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$, $\epsilon = 0$. Neste caso temos a equação modificada de Korteweg-de Vries (mKdV) complexa

$$u_t + u_{xxx} + |u|^2 u_x = 0, \quad x, t \in \mathbb{R} \tag{8}$$

Quando u é real, Kenig et al. em [28] mostraram que o problema de Cauchy para (8) é localmente bem posto em $\mathbf{H}^{\mathbf{s}}(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$, usando efeitos regularizantes, funções maximales, estimativas lineares e o princípio de contração. O mesmo argumento funciona para provar um resultado igual se u é complexa. Mais ainda, em [31], eles mostraram que este é o melhor resultado para o problema local no sentido de que a aplicação dado-solução, $u_0 \mapsto u(t)$ não é uniformemente contínua para $s < 1/4$. Para soluções reais (equação mKdV), Colliander et al. em [8] usando a transformação de Miura e o fato de que o problema de Cauchy para a equação Korteweg-de Vries (KdV) é globalmente bem posto em $\mathbf{H}^{\mathbf{s}}(\mathbb{R})$, $s > -3/4$, estabeleceram que o problema de Cauchy para (8) com dados iniciais reais é globalmente bem posto em $\mathbf{H}^{\mathbf{s}}(\mathbb{R})$, $s > 1/4$.

Quando $\alpha(t)$, $\beta(t)$, γ, δ e ϵ são constantes reais, Laurey em [37], usando estimativas lineares e um processo de regularização (veja [25]), provou que o problema de Cauchy para (1) é localmente bem posto em $\mathbf{H}^{\mathbf{s}}(\mathbb{R})$, $s > 3/4$. Laurey provou também que neste caso o PVI é globalmente bem posto em $\mathbf{H}^{\mathbf{1}}(\mathbb{R})$, usando o fato que o fluxo associado a (1) preserva as seguintes quantidades ((5.4) e (5.8) do Lema 5.1 em [37])

$$I_1(v) = \int_{\mathbb{R}} |v|^2(x,t)dx. \tag{9}$$

$$\begin{aligned} I_2(v) &= c_1 \int_{\mathbb{R}} |\partial_x v|^2(x,t)dx + c_2 \int_{\mathbb{R}} |v|^4(x,t)dx \\ &\quad + c_3 \int_{\mathbb{R}} v(x,t)\partial_x \overline{v(x,t)}dx, \end{aligned} \tag{10}$$

onde c_1, c_2, c_3 são constantes que dependem dos coeficientes de (1). Staffilani em [48], usando idéias de Kenig et al. [28] para a equação mKdV, provou que o problema de Cauchy para (1) é localmente bem posto em $\mathbf{H}^{\mathbf{s}}(\mathbb{R})$ para $s \geq 1/4$ quando α e β são constantes reais e $\beta \neq 0$, melhorando o resultado de Laurey em [37].

Quando $\alpha(t), \beta(t) \in \mathcal{C}^1([-T_0, T_0]; \mathbb{R}), \beta(t) \neq 0$, $\forall t \in [-T_0, T_0]$, $T_0 > 0$, Laurey em [38] provou que o problema de Cauchy para (1) com uma não linearidade mais geral da forma $u(g * |u|^2) + i\partial_x[u(g * |u|^2)]$, onde g é a soma de uma delta de Dirac e uma função integrável, é localmente bem posto em $\mathbf{H}^{\mathbf{s}}(\mathbb{R})$, para $s > 3/4$.

Consideramos agora $u = u(x,t)$ uma solução de (1) com $\alpha(t) = \alpha$ e $\beta(t) = \beta \neq 0$ constantes reais e $\gamma = (\delta - \epsilon)\alpha/3\beta$. Se definimos

$$v(x,t) := \exp\{i\frac{\alpha}{3\beta}x + i\frac{\alpha^3}{27\beta^2}t\}u(x + \frac{\alpha^2}{3\beta}t, t), \tag{11}$$

então $v = v(x,t)$ é uma solução de

$$v_t + \beta\partial_x^3 v + \delta|v|^2\partial_x v + \epsilon v^2 \partial_x \overline{v} = 0. \tag{12}$$

Observe que esta mudança de variável leva a equação (1) numa equação de tipo mKdV complexa. Isto sugere que os resultados obtidos para esta equação podem ser aplicados também para (1), como no caso quando os coeficientes são constantes mostrado por

Staffilani em [48]. Logo a existência do termo dispersivo $\beta(t)u_{xxx}$ vai nos permitir trabalhar com técnicas similares as desenvolvidas para a equação mKdV.

Nosso primeiro objetivo será mostrar que efetivamente o PVI (3) com $\beta(t) \neq 0$ é localmente bem posto para dados em $\mathbf{H^s}(\mathbb{R})$, $s > 1/4$, como no caso de coeficientes constantes. Desta maneira melhoramos o resultado encontrado por Laurey [38], para $s > 3/4$, o qual foi obtido usando o método de Kenig et al. em [26]. Veremos que, no estudo do problema de valor inicial, a não linearidade considerada em [38] se reduz ao estudo da não linearidade da equação de Hasegawa-Kodama. O ingrediente mais importante da prova está nas estimativas das soluções do problema linear

$$\begin{cases} \partial_t u + i\alpha(t)\partial_x^2 u + \beta(t)\partial_x^3 u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{13}$$

a solução é dada por

$$U(t)u_0(x) = u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\phi(\xi,t)+ix\xi}\mathcal{F}(u_0)(\xi)d\xi, \tag{14}$$

onde

$$\phi(\xi,t) := \xi^2\int_0^t \alpha(s)ds + \xi^3\int_0^t \beta(s)ds. \tag{15}$$

Nossa principal ferramenta, Teorema 1.2, será o seguinte efeito de regularização local tipo Kato para as soluções do problema linear (13).

$$\|\partial_x U(t)u_0(x)\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_T}} \leq c(1+T)^{1/2}\|u_0\|_{\mathbf{L^2}}. \tag{16}$$

Este efeito foi encontrado primeiro por Kato em [23] para as soluções da equação KdV. A desigualdade (16) foi provada por Laurey em [38] (Corolário 3.2) com a ajuda do Teorema $T1$ (veja o Apéndice). Usando um argumento direto, provamos a desigualdade (16) sem usar o Teorema $T1$ (veja o Apéndice). Outra ferramenta importante na nossa prova é a estimativa da função maximal, veja o Teorema 1.4, a saber

$$\|U(t)u_0\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_T}} \leq c(1+T)^{1/2}\|u_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}}. \tag{17}$$

Observe que esta estimativa fornece uma restrição aos espaços de Sobolev onde o problema pode ser resolvido. Encontraremos também estimativas do tipo Strichartz para um problema de Cauchy mais geral (Teorema 1.4) usando o mesmo esquema da prova da limitação da Função Maximal (Teorema 1.3), cujo corolário nos permite estimar o termo não linear $|u|^2u$ sem a ajuda do Lema 4.7 de Staffilani ([48]). Ver detalhes no Capítulo 1.

Nos capítulos seguintes consideramos o PVI associado a (1) quando $\alpha(t) = \alpha$ e $\beta(t) = \beta$ são constantes reais, é dizer,

$$\begin{cases} \partial_t u + i\alpha\partial_x^2 u + \beta\partial_x^3 u + i\gamma|u|^2u + \delta|u|^2\partial_x u + \epsilon u^2\partial_x\overline{u} = 0, \quad x,t\in\mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{18}$$

Nos capítulos 2 e 3 supomos $\beta \neq 0$.

Como comentamos anteriormente, foi mostrado em [48] que o PVI (18) é localmente bem posto para dados em $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$, além disso em [37] foi mostrado que o problema é globalmente bem posto em $\mathbf{H}^1(\mathbb{R})$. No Capítulo 2, damos uma resposta afirmativa para a pergunta natural: existe $1/4 < s < 1$, tal que o PVI (18) tem soluçoes globais em $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$? De fato neste trabalho usaremos uma modificação das idéias de Bourgain em [4] e de Fonseca, Linares e Ponce em [13] para obter uma resposta á pergunta acima. Provamos que o problema de Cauchy (18) é globalmente bem posto em $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ para $s > 5/9$.

No Capítulo 3, estudamos um princípio de continuação única. Consideramos o PVI linear (13) com α e β constantes. Por (14), sabemos que sua solução $u(t,x)$ satisfaz

$$\mathcal{F}(u(t))(\xi) = e^{it(\alpha\xi^2+\beta\xi^3)}\mathcal{F}(u_0)(\xi). \tag{19}$$

Suponhamos que o dado inicial u_0 é suficientemente regular e tem suporte compacto. Usando propriedades da transformada de Fourier obtemos o seguinte: se para algum $t_0 \neq 0$, $u(t_0)$ também tem suporte compacto, então $u = 0$. Na verdade, se existem $t_0 \neq t_1$ tais que $supp\, u(t_0)$ e $supp\, u(t_1)$ são compactos, então $u = 0$ (ver Observação 3.2 para detalhes). Portanto é natural perguntar-se se esta propriedade se preserva quando adicionamos o termo não linear na equação, isto é, seja $u(x,t)$, solução suficientemente regular de (18), se existem $t_0 \neq t_1$ tais que $supp\, u(t_0)$ e $supp\, u(t_1)$ são compactos, será que $u = 0$? Neste trabalho vamos considerar uma questão mais geral.

Seja $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [-T,T]$, uma solução suficientemente suave de (18), existem $I \subsetneq [-T,T]$, $J \subseteq \mathbb{R}$, $J \neq \varnothing$, tais que

$$\begin{gathered} supp\ u(t) \subseteq J \text{ para todo } t \in I, \\ \text{implique que } u(t) = 0 \text{ para todo } t \in [-T,T]\ ? \end{gathered} \tag{20}$$

Segundo nosso conhecimento, os primeiros trabalhos para responder a este tipo de pergunta (para equações de tipo dispersivo) foram desenvolvidos por Saut e Scheurer em [47] usando estimativas tipo Carleman. Eles provaram o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Se $u = u(x,t)$ é uma solução suave de*

$$\partial_t u + \beta\partial_x^3 u + \sum_{j=0}^{2} r_j(x,t)\partial_x^j u = 0, \qquad (x,t) \in (a,b) \times (t_1,t_2), \tag{21}$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$, $r_j \in \mathbf{L}^\infty((t_1,t_2) : \mathbf{L}^2_{loc}(a,b))$, e se u se anula num conjunto aberto $\mathcal{O} \subseteq (a,b) \times (t_1,t_2)$, então u se anula em cada componente horizontal de $\mathcal{O}$, isto é, no conjunto $\{(x,t) \in (a,b) \times (t_1,t_2); \exists x_1, (x_1,t) \in \mathcal{O}\}$.

Usando este teorema, eles também mostraram o corolário.

Corolário 0.1. *Se $u = u(x,t)$ é uma solução suave de (21) e $\operatorname{supp} u(\cdot,t) \subset (a,b)^c$, para todo $t \in (t_1,t_2)$, então*

$$u(t) \equiv 0.$$

B. Zhang, usando métodos de espalhamento inverso deu uma resposta afirmativa a esta pergunta para a equação KdV (veja [56], Corolário 4.1) quando

$$I = \{t_1,t_2\}, \quad t_1 \neq t_2, \quad J = (a,b). \tag{22}$$

Bourgain em [2] obteve uma resposta afirmativa para a pergunta (20) com a hipótese de ter soluções com suporte compacto num intervalo de tempo, isto é, quando

$$I = [t_1,t_2], \quad t_1 < t_2, \quad \text{e } J \text{ compacto.} \tag{23}$$

Kenig et al. em [30], também deram uma resposta positiva a pergunta (20) para a equação KdV generalizada quando temos

$$I = \{t_1,t_2\}, \quad t_1 \neq t_2, \quad J = (-\infty,a) \text{ ou } J = (a,\infty), \tag{24}$$

Na seção 3.1 usaremos o argumento de Bourgain em [2] (Teorema de Paley-Wiener e estimativas na transformada de Fourier da Fórmula de Duhamel) e provaremos que as soluções de (18) satisfazem um princípio de continuação única (20), quando as soluções de HK tem suporte compacto num intervalo de tempo, isto é, quando temos as condições (23). Apresentamos em detalhe o argumento esquematizado em [2]. Na seção 3.2 generalizamos o esquema de Kenig et al. em [30]. Usando o resultado da seção anterior, provamos que soluções de (18) verificam um princípio de continuação única como em (20) quando o suporte das soluções da equação HK é compacto em dois tempos distintos, a saber, quando temos.

$$I = \{t_1,t_2\}, \quad t_1 \neq t_2, \text{ e } J \text{ compacto.} \tag{25}$$

Usando o Corolário 0.1, provamos também que (18) tem o princípio de continuação única como em (20) quando temos a situação descrita em (24).

Queremos observar que quando $\epsilon = 0$, $\beta \cdot \delta > 0$ e $\gamma = (\alpha/3\beta)\delta$ em (18), temos para a equação

$$\partial_t u + i\alpha\partial_x^2 u + \beta\partial_x^3 u + i\frac{\alpha}{3\beta}\delta|u|^2 u + \delta|u|^2\partial_x u = 0, \tag{26}$$

a existência de ondas solitárias com dois parâmetros

$$u_{\eta,N}(x,t) = f_\eta(x + \psi(\eta,N)t)\exp i\{Nx + \phi(\eta,N)t\}, \tag{27}$$

onde $f_\eta(x) = \eta f(\eta x)$, $f(x) = (A\cosh x)^{-1}$, $A = \sqrt{\delta/(6\beta)}$, $\psi(\eta,N) = 2\alpha N + 3\beta N^2 - \eta^2 A^2 \beta$ e $\phi(\eta,N) = \alpha N^2 + \beta N^3 - 3\eta^2 A^2 \beta N - \alpha\eta^2 A^2$. Por outro lado, se $\epsilon \neq 0$, $\beta \cdot (\delta + \epsilon) > 0$, temos a existência de ondas solitárias com um parâmetro

$$u_\eta(x,t) = g_\eta(x + \psi(\eta,w)t)\exp i\{wx + \phi(\eta,w)t\},$$

onde $w = (\gamma - 2\alpha A^2)/(2\epsilon)$, $g_\eta(x) = \eta g(\eta x)$, $g(x) = (A\cosh x)^{-1}$, $A = \sqrt{(\epsilon+\delta)/(6\beta)}$, ψ e ϕ como acima. Temos também que se u é uma solução de (18) então se $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, $v = au$ é também uma solução de (18) e se $\delta \neq \epsilon$ em (18) então $u(x,t) = \exp i\{Cx + Dt + C_0)\}$ é uma solução de (18), onde $D = \alpha C^2 + \beta C^3$ e $C = \gamma/(\epsilon - \delta)$.

No Capítulo 4, Seção 4.1 usaremos as ondas solitárias como em (27) para verificar que a mesma técnica de Kenig et al. em [31] usada para provar mal colocação da equação mKdV complexa, também permite obter a mal colocação para (26) quando $s < 1/4$. Na Seção 4.2 usaremos as idéias de Bourgain em [3] para provar que a aplicação dado-solução $u_0 \mapsto u(t)$, para o PVI (18), não é $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ na origem nos seguintes casos:

i) $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, $\delta = \epsilon$, $\gamma \neq 0$ para $s < 0$.

ii) $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, $\delta \neq \epsilon$ para $s < 1/2$.

iii) $\beta \neq 0$, $\delta \neq \epsilon$ para $s < 1/4$.

iv) $\beta \neq 0$, $\delta = \epsilon$, $\gamma \neq 0$ para $s < -1/4$.

Portanto se na definição de localmente bem posto usamos para a aplicação dado-solução a hipótese de ser $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ no lugar de ser contínua, teremos que o PVI associado a (18) é mal colocado nos casos i), ii), iii) e iv) acima descritos.

Notação

- $\mathbb{R}$ (conjunto dos número reais)
- $\mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos)
- $\partial_x^k u := u_{x\ldots x} = \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$ (derivada parcial de u com respeito a x, de ordem k)
- $\mathcal{F}(u)(x) := (\sqrt{2\pi})^{-1} \int \exp\{-ix\xi\} u(\xi) d\xi$ (transformada de Fourier de u)
- $\mathcal{F}^{-1}(u)(x) := (\sqrt{2\pi})^{-1} \int \exp\{ix\xi\} u(\xi) d\xi$ (inversa da transformada de Fourier de u)
- $D^s u$ $(\mathcal{F}(D^s u)(x) = |x|^s \mathcal{F}(u)(x),$ potencial de Riesz de ordem s)
- $\mathcal{C}^k(X)$ (conjunto das funções k diferenciaveis de variável no espaço X, com valores em $\mathbb{C}$)
- $f \in \mathcal{C}_0^k(X)$ ($f \in \mathcal{C}^k(X)$ e f com suporte compacto)
- $f \in \mathcal{C}^{3,1}(\mathbb{R}^2)$ $(f,\, \partial_x f,\, \partial_x^2 f,\, \partial_x^3 f,\, \partial_t f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2))$
- $f \in \mathcal{C}_0^{3,1}(\mathbb{R}^2)$ ($f \in \mathcal{C}^{3,1}(\mathbb{R}^2)$, com suporte compacto)
- $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ ($f \in \mathcal{C}^k(X)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$)
- $\mathcal{C}([-T,T];X)$ (conjunto das funções contínuas de $[-T,T]$ em X)
- $\|f\|_{\mathbf{L^p}(X)} := (\int_X |f|^p)^{1/p}$
- $\mathbf{L^p}(\mathbb{R}^n) := \mathbf{L^p}$
- $\mathbf{S}(\mathbb{R}) := \mathbf{S}$ (espaço de Schwartz em $\mathbb{R}$)
- $\mathbf{H^s}(\mathbb{R}) := \mathbf{H^s}$ (espaço de Sobolev de ordem s, com base em $\mathbf{L^2}(\mathbb{R})$)
- $\|\cdot\|_X$ (norma de X)
- $\|\cdot\|_\infty$ (norma de $\mathbf{L}^\infty$)

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (produto interno de $\mathbf{L^2}$)
- $\|f\|_{\mathbf{L^p_x L^q_t}} := \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^q dt \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}$
- $\|f\|_{\mathbf{L^p_x L^q_T}} := \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^q dt \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}$
- $supp\ u$ (suporte de u)
- $\exp\{u\} := e^u$
- $a \lesssim b$ (existe uma constante $c > 0$ tal que $a \leq c\,b$)
- $a \gtrsim b$ (existe uma constante $c > 0$ tal que $a \geq c\,b$)
- $a \sim b$ ($a \lesssim b$ e $a \gtrsim b$)
- $f * g$ (produto de convolução)
- $f * f * f := f^{*3}$
- p' ($1/p + 1/p' = 1$)
- χ_I (função indicatriz do conjunto I)
- $B_r(a)$ (bola de centro em a e raio r)
- C, c (denotam as várias constantes que aparecem, cujo valor exato é irrelevante para nossas considerações)

Capítulo 1

Teoria local para o PVI associado a equação de Hasegawa Kodama com coeficientes variáveis

Neste capítulo estudaremos o PVI associado a equação HK com coeficientes dependentes do tempo, nos espaços de Sobolev $\mathbf{H^s}$.

$$\begin{cases} \partial_t u + i\alpha(t)\partial_x^2 u + \beta(t)\partial_x^3 u + i\gamma|u|^2 u + \delta|u|^2\partial_x u + \epsilon u^2 \partial_x \overline{u} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função complexa, $\alpha(t), \beta(t) \in \mathcal{C}^1([-T_0, T_0]; \mathbb{R}), \beta(t) \neq 0, \forall t \in [-T_0, T_0]$ para algum $T_0 > 0$; $\gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{C}$.

Nosso resultado aqui é estabelecer a teoria local para a equação acima.

Teorema 1.1. *Sejam $u_0 \in \mathbf{H^s}(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ como acima, então existem $T = T(\|u_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}}) > 0$ e uma única solução do Problema de Valor Inicial :*

$$\begin{cases} \partial_t u + i\alpha(t)\partial_x^2 u + \beta(t)\partial_x^3 u + F(u) = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.2}$$

onde

$$F(u) = i\gamma|u|^2 u + \delta|u|^2\partial_x u + \epsilon u^2 \partial_x \overline{u}, \tag{1.3}$$

tal que

$$u \in \mathcal{C}([-T, T]; \mathbf{H^s}(\mathbb{R})), \tag{1.4}$$

$$\|\partial_x u\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_T}} + \|D_x^s \partial_x u\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_T}} < \infty, \tag{1.5}$$

$$\|D_x^{s-1/4}\partial_x u\|_{\mathbf{L^{20}_x L^{5/2}_T}} < \infty, \tag{1.6}$$

$$\|u\|_{\mathbf{L^5_x L^{10}_T}} + \|D_x^s u\|_{\mathbf{L^5_x L^{10}_T}} < \infty, \tag{1.7}$$

$$\|u\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_T}} < \infty, \tag{1.8}$$

$$\|u\|_{\mathbf{L^8_x L^8_T}} + \|D_x^s u\|_{\mathbf{L^8_x L^8_T}} < \infty. \tag{1.9}$$

Alem disso, para qualquer $T' \in [-T, T]$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de $u_0 \in \mathbf{H}^{\mathbf{s}}(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$, tal que a aplicação de $\mathcal{V}$ na classe definida por (1.5)-(1.9) $\tilde{u}_0 \to \tilde{u}(t)$, com T' no lugar de T é Lipschitz.

Para demonstrar o Teorema 1.1 usaremos técnicas de Kenig et al. ([28]) considerando a solução como um ponto fixo de uma aplicação integral associada a um problema linear. Inicialmente, faremos a prova do Teorema 1.1 para o caso mais interessante que corresponde a $s = 1/4$.

Notaremos por $u = \Phi(v) = \Phi_{u_0}(v)$ a solução do seguinte PVI.

$$\begin{cases} \partial_t u + i\alpha(t)\partial_x^2 u + \beta(t)\partial_x^3 u + F(v) = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{1.10}$$

Pelo princípio de Duhamel, (1.10) é equivalente á seguinte equação integral

$$u(t) = \Phi(v)(t) = \Phi_{u_0}(v)(t) = U(t)u_0 - \int_0^t U(\tau, t)F(v(\tau))d\tau, \tag{1.11}$$

onde $F(v)$ é a parte não linear de (1.2),

$$U(\tau, t)u = \int_{\mathbb{R}} e^{i\phi(\xi,\tau,t)+ix\xi}\mathcal{F}(u)(\xi)d\xi, \tag{1.12}$$

onde

$$\phi(\xi, \tau, t) = \xi^2 \int_\tau^t \alpha(s)ds + \xi^3 \int_\tau^t \beta(s)ds = b_2(\tau, t)\xi^2 + b_3(\tau, t)\xi^3.$$

O operador $U(\tau, t)$ é um operador unitário em $\mathbf{H}^{\mathbf{s}}$ e $U(0, t) = U(t)$. Nesse trabalho consideraremos as seguintes normas de tipo misto:

$$\begin{aligned}
\nu_1^T(u) &= \|u\|_{\mathbf{L^\infty_T L^2_x}} + \|D_x^{1/4}u\|_{\mathbf{L^\infty_T L^2_x}}, \\
\nu_2^T(u) &= \|\partial_x u\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_T}} + \|D_x^{1/4}\partial_x u\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_T}}, \\
\nu_3^T(u) &= \|D_x u\|_{\mathbf{L^{20}_x L^{5/2}_T}}, \\
\nu_4^T(u) &= \|u\|_{\mathbf{L^5_x L^{10}_T}} + \|D_x^{1/4}u\|_{\mathbf{L^5_x L^{10}_T}}, \\
\nu_5^T(u) &= \|u\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_T}}, \\
\nu_6^T(u) &= \|u\|_{\mathbf{L^8_x L^8_T}} + \|D_x^{1/4}u\|_{\mathbf{L^8_x L^8_T}},
\end{aligned}$$

e os conjuntos

$$Z_T = \{w \in \mathcal{C}([-T, T]; \mathbf{H^{1/4}}(\mathbb{R})) / \, |||w|||_T < \infty\}, \tag{1.13}$$

$$Z_{a,T} = \{w \in \mathcal{C}([-T, T]; \mathbf{H^{1/4}}(\mathbb{R})) / \, |||w|||_T \leq a\}, \tag{1.14}$$

onde $|||w|||_T = \max_{i=1,\dots,6} \nu_i^T(u)$.

Um único ponto fixo do operador Φ no espaço normado Z_T vai nos dar uma única solução do Problema de Valor Inicial (1.2). Para ter isto provaremos primeiro que $\Phi : Z_{a,T} \mapsto Z_{a,T}$ é uma contração e depois estenderemos a unicidade para o espaço Z_T. Portanto para poder usar o princípio de contração na aplicação Φ, no espaço normado $Z_{a,T}$, provaremos na seguinte seção a estimativa linear,

$$|||U(t)u_0|||_T \leq C(1+T)^{1/2}\|u_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}},$$

para $u_0 \in \mathbf{H^{1/4}}$.

1.1 Estimativas Lineares

Consideramos $U(t)u_0(x) = u(x,t)$ solução do PVI (13), com $\alpha(t), \beta(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$; $\alpha(t), \beta(t) \in \mathcal{C}^1([-T_0,T_0];\mathbb{R})$, $\beta(t) \neq 0$, $\forall t \in [-T_0,T_0]$, $0 < T_0 \leq \infty$.

Sejam $b_2(t) := \int_0^t \alpha(s)ds$, $b_3(t) := \int_0^t \beta(s)ds$ e $a_j(t) = \int_0^1 b_j'(\rho t)d\rho$, $j = 2,3$, temos que $b_j(t) = ta_j(t)$, $j = 2,3$ e portanto

$$\phi(\xi,t) = t\psi(\xi,t),$$

onde $\psi(\xi,t) := a_2(t)\xi^2 + a_3(t)\xi^3$.

Observação 1.1. *Note que como $\beta \neq 0$, se $|\beta(t)| \geq a > 0, \quad \forall t \in [-T_0,T_0]$, pela continuidade de β temos que $|b_3(t)| \geq a|t|$ e portanto $|a_3(t)| \geq a > 0, \quad \forall t \in [-T_0,T_0]$.*

Daremos a seguir uma prova de um teorema de regularização chamado Efeito de Regularização Local.

1.1.1 Efeito de Regularização Local

Para evitar usar o Teorema $T1$ (Apéndice) e fazer uma prova direta, por razões de carater técnico suporemos que $\alpha(t) \in \mathcal{C}^2([-T_0,T_0];\mathbb{R})$ e $\beta(t) \in \mathcal{C}^3([-T_0,T_0];\mathbb{R})$. Laurey provou o seguinte teorema quando $\alpha(t), \beta(t) \in \mathcal{C}^1([-T_0,T_0];\mathbb{R})$, veja o Corolário 2.3 de [38].

Teorema 1.2. *Seja $U(t)$ o grupo unitário definido em (14), se $u_0 \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$ então para $T \in (0, T_0/2)$ temos*

$$\|\partial_x U(t)u_0(x)\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_T}} \leq c(1+T)^{1/2}\|u_0\|_{\mathbf{L^2}}, \tag{1.15}$$

onde c é uma constante independente de T e u_0.

Demonstração: Sejam $M > 0$, tal que $|b_2^{(j)}(t)| \leq M$, $|b_3^{(j+1)}(t)| \leq M$, $j = 0, \ldots, 3$, e $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([-T_0, T_0])$, com $\varphi = 1$ em $[-T, T]$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $|\varphi^{(j)}(t)| \leq M$, $j = 1, \ldots, 3$ e $supp\, \varphi = [-\min\{1, T_0/2\} - T, \min\{1, T_0/2\} + T]$, então:

$$\|\partial_x U(t) u_0(x)\|_{\mathbf{L^2_{[-T,T]}}} \leq \|\varphi(t) \partial_x U(t) u_0(x)\|_{\mathbf{L^2_t}}.$$

Portanto para provar (1.15) é suficiente mostrar

$$\sup_x \|\varphi(t) \partial_x U(t) u_0(x)\|_{\mathbf{L^2_t}} \leq c(1+T)^{1/2} \|u_0\|_{\mathbf{L^2}}, \tag{1.16}$$

onde $c = c(a, M)$, $a = a(T_0, \beta)$, $M = M(T_0, \alpha, \beta, \varphi)$. Usando dualidade temos

$$\|\varphi(t) \partial_x U(t) u_0(x)\|_{\mathbf{L^2_t}} = \sup_g \Big\{ \Big| \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \partial_x U(t) u_0(x) \overline{g(t)} dt \Big| : \|g\|_{\mathbf{L^2_t}} \leq 1 \Big\}.$$

Por (14) temos

$$\partial_x U(t) u_0(x) = i \int_{\mathbb{R}} e^{i\phi(\xi,t) + ix\xi} \xi \mathcal{F}(u_0)(\xi) d\xi. \tag{1.17}$$

Usando os teoremas de Fubini e Plancherel obtemos

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \partial_x U(t) u_0(x) \overline{g(t)} dt \Big| &= \Big| \int_{\mathbb{R}} u_0(\eta) \mathcal{F}(L\overline{g})(\eta - x) d\eta \Big| \\ &\leq \|u_0\|_{\mathbf{L^2}} \cdot \|L\overline{g}\|_{\mathbf{L^2}}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

onde

$$L\overline{g}(\xi) = \xi \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \overline{g(t)} e^{i\phi(\xi,t)} dt.$$

Portanto para provar (1.15) basta ver que

$$\|L\overline{g}\|_{\mathbf{L^2}} \leq c(1+T)^{1/2} \|g\|_{\mathbf{L^2}}. \tag{1.19}$$

Nos consideramos agora o operador linear

$$Lg(\xi) = \xi \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) g(t) e^{i\phi(\xi,t)} dt, \tag{1.20}$$

o operador adjunto de L é

$$L^* h(t) = \varphi(t) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\phi(\xi,t)} \xi h(\xi) d\xi, \tag{1.21}$$

segue-se que

$$LL^* h(\xi) = \int_{\mathbb{R}} h(\eta) K(\xi, \eta) d\eta, \tag{1.22}$$

onde

$$K(\xi,\eta)=\xi\eta\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)^2e^{ib_3(t)(\xi^3-\eta^3)+ib_2(t)(\xi^2-\eta^2)}dt. \tag{1.23}$$

Se provarmos que LL^* é um operador limitado em $\mathbf{L^2}$ com $\|LL^*\|_{\mathbf{L^2}}\le c(1+T)$ o teorema estará provado. Para ter isto precisamos dos seguintes lemas.

Lema 1.1. *Sejam $f\in\mathbf{S}(\mathbb{R})$ e S o operador integral, dado por*

$$(Sf)(x)=\int_{\mathbb{R}}K(x,y)f(y)dy,$$

onde o núcleo K é tal que

$$\sup_x\int_{\mathbb{R}}|K(x,y)|dy\le 1,$$

e

$$\sup_y\int_{\mathbb{R}}|K(x,y)|dx\le 1.$$

Então $\|S\|_{\mathbf{L^2}\mapsto\mathbf{L^2}}\le 1$.

Demonstração: Veja o lema da Seção 2.4.1, página 284 de [50].

Lema 1.2. *Sejam $K=K(\xi,\eta)$ o núcleo dado por (1.23), e φ como na demonstração do Teorema 1.2, então valem as desigualdades,*

$$\sup_\eta\int_{\mathbb{R}}|K(\xi,\eta)|d\xi \quad\le\quad C(1+T), \tag{1.24}$$

e

$$\sup_\xi\int_{\mathbb{R}}|K(\xi,\eta)|d\eta \quad\le\quad C(1+T). \tag{1.25}$$

Demonstração: Seja

$$J(\xi,\eta):=\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)^2e^{ib_3(t)(\xi^3-\eta^3)+ib_2(t)(\xi^2-\eta^2)}dt,$$

e sejam $k_3:=\xi^3-\eta^3$ e $k_2:=\xi^2-\eta^2$. Como $\varphi(t)$ tem suporte compacto e $|b_3'(t)|=|\beta(t)|\ge a>0$ integrando por partes temos

$$\begin{aligned}J(\xi,\eta)&=\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)^2e^{ib_2(t)k_2}e^{ib_3(t)k_3}dt\\&=\int_{\mathbb{R}}\psi(t,k_2)e^{ib_3(t)k_3}dt\\&=-\int_{\mathbb{R}}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\psi(t,k_2)}{ik_3b_3'(t)}\Big)e^{ib_3(t)k_3}dt.\end{aligned} \tag{1.26}$$

Seja M a mesma cota para φ, b_2, b_3 e as suas derivadas, isto é, $|\varphi^{(j)}(t)| \leq M$, $|b_2^{(j)}(t)| \leq M$, $|b_3^{(j+1)}(t)| \leq M$ para todo $t \in [-1-T, 1+T]$, $j = 0, 1$, então derivando (1.26) temos

$$|J(\xi,\eta)| \leq \frac{2(1+T)M}{a|k_3|}\Big(2 + \frac{M}{a} + M|k_2|\Big). \tag{1.27}$$

Integramos por partes 3 vezes como em (1.26) derivando e limitando como em (1.27) temos:

$$|J(\xi,\eta)| \leq \frac{1+T}{|k_3|^3}\Big(\sum_{j=0}^{3} e_j |k_2|^j\Big), \tag{1.28}$$

com e_j funções de M e a. Portanto demonstraremos o Lema 1.2 se provarmos que

$$\sup_{\xi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi\eta|\,|\xi^2-\eta^2|^j}{1+|\xi^3-\eta^3|^3} d\eta < \infty, \tag{1.29}$$

para $j = 0, \cdots, 3$. Escrevemos,

$$\begin{aligned} I_j = &\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi\eta|\,|\xi^2-\eta^2|^j}{1+|\xi^3-\eta^3|^3} d\eta \\ &= \int_{|\xi-\eta|\leq 1} \frac{|\xi\eta|\,|\xi^2-\eta^2|^j}{1+|\xi^3-\eta^3|^3} d\eta + \int_{|\xi-\eta|>1} \frac{|\xi\eta|\,|\xi^2-\eta^2|^j}{1+|\xi^3-\eta^3|^3} d\eta \\ &= I_j^1 + I_j^2. \end{aligned}$$

Primeiro consideramos I_j^1:

Se $|\xi| \leq 1$ temos $I_j^1 \lesssim 3^j$, $\forall j \in \mathbb{N}$.
Se $|\xi| > 1$ fazemos a mudança de variável $\lambda = \eta - \xi$, logo

$$I_j^1 = \int_{|\lambda|\leq 1} \frac{|\xi|\,|\lambda+\xi|\,|\lambda+2\xi|^j\,|\lambda|^j}{1+|\lambda|^3[(\lambda+\frac{3}{2}\xi)^2+\frac{3}{4}\xi^2]^3} d\lambda. \tag{1.30}$$

Tomando em conta que $(\lambda+\frac{3}{2}\xi)^2+\frac{3}{4}\xi^2 \geq \xi^2$ e fazendo a mudança de variável $x = \lambda\xi^2$,

$$I_j^1 \leq \frac{1}{|\xi|^j} \int_{|x|\leq\xi^2} \frac{|x/\xi^3+1|\,|x/\xi^3+2|^j\,|x|^j}{1+x^3} dx. \tag{1.31}$$

Como para $|x| \leq \xi^2$ e $|\xi| > 1$ temos $|x|/|\xi^3| \leq 1$, $|x|^3/|\xi|^3 \leq |x|^2/|\xi|$. Segue-se de (1.31) que $I_j^1 \lesssim 1$ para $j = 0, \cdots, 3$.
Agora consideramos I_j^2

Se $|\xi| \leq 1$, usando a mesma mudança $\lambda = \eta - \xi$ e o fato de que aqui $|\lambda + \frac{3}{2}\xi| \leq \frac{5}{2}|\lambda|$ segue-se que

$$I_j^2 \lesssim \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + |\lambda|^{2j+1}}{1 + (2/5)^3(\lambda + \frac{3}{2}\xi)^9} d\lambda \lesssim C$$

para $j = 0, \cdots, 3$.

Se $|\xi| > 1$ faremos a mudança de variáveis $\eta = \xi x$, teremos:

$$I_j^2 \leq \frac{1}{|\xi|^{3-j}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|\,|1 + x|^j}{[(x + 1/2)^2 + 3/4]^3} dx \lesssim C.$$

para $j = 0, \cdots, 3$. Portanto obtemos (1.29). $\square$

Observação 1.2. *1) Note que quando T é suficientemente pequeno não temos problemas para limitar as derivadas de φ por uma mesma constante $M > 0$ independente de T, pois o comprimento do suporte de φ é maior que* $\min\{2, T_0\}$.

2) Para justificar o teorema de Fubini usado em (1.18), precisamos que $L\overline{g}(\xi) = H(\xi) \in \mathbf{L^1}$, usando integração por partes 3 vezes como na prova do Lema 1.2 observamos que

$$Lw(\xi) \leq \frac{C}{1 + \xi^2} \sum_{j=0}^{3} \int_{\mathbb{R}} |\partial^j w(\eta)| d\eta,$$

onde $w \in \mathcal{C}_0^\infty$, C é uma função de M e a.

1.1.2 Estimativa da Função Maximal

Provaremos agora uma estimativa da Função Maximal associado as soluções do PVI (13). Esta estimativa vai nos permitir provar que o Problema de Valor Inicial (1.2) é localmente bem posto em $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ para $s \geq 1/4$. Na prova usaremos um argumento de Kenig et al. (Teorema 3.7 de [28]). Precisamos usar os seguintes lemas,

Lema 1.3. [Van-der Corput] *Seja φ uma função real, regular em $[a, b]$ tal que $|\varphi^{(k)}(x)| \geq 1$ para todo $x \in [a, b]$. Então*

$$\Big| \int_a^b \exp\{i\lambda\varphi(x)\} dx \Big| \leq C(k)\lambda^{-1/k}$$

tem-se se
i) $k \geq 2$ ou
ii) $k = 1$ e $\varphi'(x)$ é monotona.

A limitação $C(k)$ é independente de φ, λ, a e b.

Demonstração: Veja a proposição 2, página 332 de [50].

Lema 1.4. *Seja f uma função monótona e seja $I = \int_a^b e^{i\phi(x)} f(x)dx$*
i) Se $\left|\frac{d\phi}{dx}\right| > \lambda > 0$ em $[a,b]$, $\frac{d\phi}{dx}$ monótona, então $|I| \lesssim \frac{1}{\lambda}\max_{[a,b]}|f(x)|$.
ii) Se $\left|\frac{d^k\phi}{dx^k}\right| > \lambda > 0$, $k \geq 1$ então $|I| \lesssim \frac{1}{\lambda^{1/k}}\max_{[a,b]}|f(x)|$.

Demonstração: A prova é uma aplicação imediata do Lema de Van-der Corput .

Lema 1.5. *Sejam $T > 0$, e $I^{a,b}(\eta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(bx^3+ax^2+x\eta)}\frac{1}{|x|^{1/2}}dx$. Então tem-se que*

$$|I^{a,b}(\eta)| \leq \frac{c(1+T)^{3/2}}{|\eta|^{1/2}}, \tag{1.32}$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $|ab^{-2/3}| \leq T$, onde c é uma constante independente de a, b e T.

Demonstração: A desigualdade (1.32) foi provada na Proposição 1 de [33], quando $b = 0$, o caso $a = 0$ foi provado no Lema 3.6 de [28], iremos então supor $a \neq 0, b \neq 0$, $|ab^{-2/3}| \leq T$.

Fazendo inicialmente uma mudança de variáveis $x = ky$, $k = a/3b$ teremos

$$\begin{aligned}|I^{a,b}(\eta)| =& |k|^{1/2}\Big|\int_{\mathbb{R}} e^{i(c_3(y+1)^3+c_1y)}\frac{1}{|y|^{1/2}}dy\Big| \\ =& \frac{1}{|b|^{1/6}}\Big|\int_{\mathbb{R}} e^{i((y+c_3^{1/3})^3+c_1c_3^{-1/3}y)}\frac{1}{|y|^{1/2}}dy\Big|,\end{aligned} \tag{1.33}$$

onde $c_3 = bk^3$, $c_1 = k(\eta - 3k^2b)$. Se provarmos que

$$J = \Big|\int_{\mathbb{R}} e^{i((y+a_0)^3+b_0y)}\frac{1}{|y|^{1/2}}dy\Big| \leq \frac{c(1+T)^{3/2}}{|b_0+3a_0^2|^{1/2}}, \tag{1.34}$$

para todo b_0, a_0 com $|a_0| \leq T$ então o lema ficará provado, pois se temos (1.34), de (1.33) como $|a_0| = |c_3|^{1/3} \leq T$, $b_0 = c_1c_3^{-1/3}$ tem-se $b_0 + 3a_0^2 = \eta/b^{1/3}$, portanto segue-se que

$$|I^{a,b}(\eta)| \leq \frac{c(1+T)^{3/2}}{|b|^{1/6}}\frac{|b|^{1/6}}{|\eta|^{1/2}} = \frac{c(1+T)^{3/2}}{|\eta|^{1/2}}. \tag{1.35}$$

Estimamos J,

$$J \leq \Big|\int_{|y|\leq 1} e^{i((y+a_0)^3+b_0y)}\frac{1}{|y|^{1/2}}dy\Big| + \Big|\int_{|y|\geq 1} e^{i((y+a_0)^3+b_0y)}\frac{1}{|y|^{1/2}}dy\Big| := J^1 + J^2.$$

Em J^2 temos $1/|y|^{1/2} \leq 1$, pelo Lema 1.4 com $k = 3$ temos que $J^2 \lesssim 1$, além disso $J^1 \leq \int_{|y|\leq 1} 1/|y|^{1/2} dy \lesssim 1$, portanto temos que $J \leq C$, $C \sim 1$. Seja $a_1 = b_0 + 3a_0^2$, se a_1 é tal que $|a_1| \leq 1/C^2$ então $J \leq 1/|a_1|^{1/2}$ e o problema está resolvido. Suporemos portanto no que segue $|a_1| > 1/C^2$.

Seja agora $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$, $0 \leq \varphi \leq 1$ e

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| > 2|a_1|^{1/2} + 3|a_0| = c_1 \\ 0 & \text{se } |x| < |a_1|^{1/2} + 3|a_0| = c_0. \end{cases}$$

Seja $\phi(y) = (y + a_0)^3 + b_0 y$, em (1.34) temos

$$J \leq \Big| \int_{\mathbb{R}} e^{i((y+a_0)^3+b_0 y)} \frac{\varphi(y)}{|y|^{1/2}} dy \Big| + \Big| \int_{\mathbb{R}} e^{i((y+a_0)^3+b_0 y)} \frac{(1-\varphi(y))}{|y|^{1/2}} dy \Big| := J_1 + J_2.$$

Em J_1 quando $\varphi \neq 0$ temos $|y| \geq c_0$, logo

$$\frac{d\phi}{dy}(y) = 3(y + a_0)^2 + b_0 \geq (y + a_0)^2 + |a_1|,$$

integrando por partes em J_1,

$$\begin{aligned} J_1 =& \Big| \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y)}{|y|^{1/2} \frac{d\phi}{dy}} \frac{d}{dy}(e^{i\phi}) dy \Big| \\ \leq& \Big| \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi'(y)}{|y|^{1/2} \frac{d\phi}{dy}} (e^{i\phi}) dy \Big| + \frac{1}{2} \Big| \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y)}{|y|^{3/2} \frac{d\phi}{dy}} e^{i\phi} dy \Big| + \Big| \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y)}{|y|^{1/2}} e^{i\phi} \frac{\frac{d^2\phi}{dy^2}}{(\frac{d\phi}{dy})^2} dy \Big| \\ =& L_1 + L_2 + L_3. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Como $|a_1| \geq 1/C^2$ teremos

$$L_2 \leq \frac{1}{2} \int_{|y|\geq c_0} \frac{1}{|y|^{3/2}[(y + a_0)^2 + |a_1|]} dy \leq \frac{2}{|a_1| c_0^{1/2}} \leq \frac{2}{|a_1|^{1/2} |a_1|^{3/4}} \leq \frac{2C^{3/2}}{|a_1|^{1/2}}. \tag{1.37}$$

Para L_3 temos

$$\begin{aligned} |L_3| \leq& 6 \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y)(y + a_0)}{|y|^{1/2}(|a_1| + (y + a_0)^2)^2} dy \\ \leq& \frac{6}{c_0^{1/2}} \int_{|\xi|\geq |a_1|^{1/2}} \frac{|\xi|}{(|a_1| + \xi^2)^2} d\xi \\ \leq& \frac{6|a_1|}{a_1^2 \cdot |a_1|^{1/4}} \int_{|\eta|\geq 1} \frac{|\eta|}{(1 + \eta^2)^2} d\eta \\ \lesssim& \frac{6}{|a_1|^{5/4}} \leq \frac{6C^{3/2}}{|a_1|^{1/2}}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Na segunda desigualdade fizemos a mudança de variáveis $\xi = y + a_0$, na terceira usamos que $c_0 = |a_1|^{1/2} + 3|a_0|$, na quarta desigualdade usamos a mudança $\xi = |a_1|^{1/2}\eta$ e na última $|a_1| \geq 1/C^2$.

O mesmo argumento usado em L_3 também funciona para L_1. Com efeito

$$L_1 \leq \frac{1}{c_0^{1/2}} \int_{|y|\geq c_0} \frac{dy}{(y+a_0)^2 + |a_1|} \leq \frac{|a_1|^{1/2}}{|a_1|^{5/4}} \int_{|\eta|\geq 1} \frac{d\eta}{1+\eta^2} \lesssim \frac{C^{1/2}}{|a_1|^{1/2}}. \tag{1.39}$$

De (1.36), (1.37), (1.38) e (1.39) segue-se que $J_1 \lesssim 1/|a_1|^{1/2}$. Em J_2 temos que $(1-\varphi)$ tem suporte compacto e

$$J_2 \leq \Big| \int_{|y|\leq c_0} e^{i\phi(y)} \frac{1}{|y|^{1/2}} dy \Big| + \Big| \int_{c_0 \leq |y| \leq c_1} e^{i\phi(y)} \frac{(1-\varphi(y))}{|y|^{1/2}} dy \Big| = I_1 + I_2.$$

Na segunda integral I_2, temos $|y| > c_0$ portanto, procedemos como acima. Na primeira integral I_1 fazemos $\xi = a_1 y$, logo

$$I_1 = \frac{1}{|a_1|^{1/2}} \Big| \int_{|\xi|\leq |a_1|c_0} e^{i((\frac{\xi}{a_1}+a_0)^3 + \frac{b_0}{a_1}\xi)} \frac{1}{|\xi|^{1/2}} d\xi \Big|. \tag{1.40}$$

Seja agora $k_0 > 1$, e $|b_0| \lesssim k_0$ então $|a_1 c_0| \lesssim (k_0 + 3T^2)(k_0^{1/2} + (3+\sqrt{3})T)) = m_0$ e assim $I_1 \lesssim m_0^{1/2}/|a_1|^{1/2}$. Consideramos portanto

$$|b_0| > k_0 = 1 + \frac{T^2}{k^2} \quad k = 1/\sqrt{6} - 1/\sqrt{7}. \tag{1.41}$$

De (1.41) segue-se que $|b_0| > 1 + 3T^2 > 1 + 3a_0^2$, logo $|a_1|c_0 > 1$, temos

$$\begin{aligned} I_1 =& \frac{1}{|a_1|^{1/2}} \Big\{ \Big| \int_{|\xi|\leq 1} e^{i((\frac{\xi}{a_1}+a_0)^3 + \frac{b_0}{a_1}\xi)} \frac{1}{|\xi|^{1/2}} d\xi + \int_{1\leq |\xi| \leq |a_1|c_0} e^{i((\frac{\xi}{a_1}+a_0)^3 + \frac{b_0}{a_1}\xi)} \frac{1}{|\xi|^{1/2}} d\xi \Big| \Big\} \\ \leq& \frac{4}{|a_1|^{1/2}} + \Big| \int_{1/|a_1| \leq |\xi| \leq c_0} e^{i\phi(\xi)} \frac{1}{|\xi|^{1/2}} d\xi \Big|. \end{aligned}$$

Logo basta mostrar para todo $|b_0| > k_0 = 1 + T^2/k^2$, $|a_0| \leq T$ que

$$S := \Big| \int_{1/|a_1| \leq |\xi| \leq c_0} e^{i\phi(\xi)} \frac{1}{|\xi|^{1/2}} d\xi \Big| \lesssim \frac{(1+T)^{3/2}}{|a_1|^{1/2}}. \tag{1.42}$$

Basta supor que $b_0 < 0$ pois se $b_0 > 0$, como

$$\frac{d\phi}{dy}(y) = 3(y+a_0)^2 + b_0 \geq b_0 > 0,$$

e em (1.42) temos $1/|\xi|^{1/2} \leq |a_1|^{1/2}$, pelo Lema 1.4 temos $|S| \lesssim (1+T)/|a_1|^{1/2}$ quando $b_0 > 0$, pois $1/b_0 \leq (1+3T)/a_1$.

Consideramos portanto, $\phi(y) = (y+a_0)^3 - b_0 y$ com $b_0 > 0$. Para provar (1.42) consideraremos os seguintes conjuntos,

$$A = \{y; |3(y+a_0)^2 - b_0| \leq b_0/2\}, \quad B = \{y; |3(y+a_0)^2 - b_0| \leq b_0/3\},$$

e sejam $\varphi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$ tal que

$$supp\, \varphi_1 \subset A, \quad \varphi_1(x) = 1 \quad \forall x \in B.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cup A_2 = [b_0^1, b_0^2] \cup [a_2^1, a_2^2] \\ &= [-a_0 - b_0^{1/2}/\sqrt{2}, -a_0 - b_0^{1/2}/\sqrt{6}] \cup [-a_0 + b_0^{1/2}/\sqrt{6}, -a_0 + b_0^{1/2}/\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Igualmente,

$$\begin{aligned} B &= B_1 \cup B_2 = [b_1^1, b_1^2] \cup [b_2^1, b_2^2] \\ &= [-a_0 - 2b_0^{1/2}/3, -a_0 - \sqrt{2}b_0^{1/2}/3] \cup [-a_0 + \sqrt{2}b_0^{1/2}/3, -a_0 + 2b_0^{1/2}/3]. \end{aligned}$$

Construimos φ_1 simétrica com respeito a A_1 e A_2 onde $A_2 = [a_2^1, b_2^1] \cup [b_2^1, b_2^2] \cup [b_2^2, a_2^2] = A_2^1 \cup A_2^2 \cup A_2^3$. Além disso, consideramos φ_1 crescente em A_2^1, decrescente em A_2^3 tal que $h(y) = \varphi_1/|y|^{1/2}$ não tenha mais de cinco intervalos de monotonia em A_2^3 e também não tenha mais de cinco intervalos de monotonia em A_2^1, da construção de φ_1 temos que $\varphi_1 = 1$ em A_2^2. Observamos além que: se $y > 0$ temos $h'(y) = (\varphi_1(y)/y^{1/2})' = 1/y^{1/2}(\varphi_1'(y) - \varphi_1(y)/2y)$, logo $h'(y) = -\varphi_1(y)/2y^{3/2} < 0$ em A_2^2, $h'(y) < 0$ em A_2^3, pois $\varphi_1'(y) < 0$ aqui, logo h é decrescente em A_2^2 e A_2^3 e tem cinco intervalos de monotonia em A_2^1 a mesma análise quando $y < 0$.

$$S \leq \left| \int_{1/|a_1| < |y| \leq c_0} \frac{\varphi_1(y)}{|y|^{1/2}} e^{i\phi} dy \right| + \left| \int_{1/|a_1| < |y| \leq c_0} \frac{\varphi_2(y)}{|y|^{1/2}} e^{i\phi} dy \right| = S_1 + S_2. \tag{1.43}$$

De (1.41), $b_0 > k_0 > 3T^2$, temos $1/b_0^{1/2} \leq 1/(b_0 - 3a_0^2)^{1/2} = 1/|a_1|^{1/2}$.

Em S_1, no suporte de φ_1 temos $|3(y+a_0)^2 - b_0| \leq b_0/2$ e portanto $b_0^{1/2}/\sqrt{6} \leq |y+a_0| \leq b_0^{1/2}\sqrt{2}$, por (1.41) $b_0^{1/2} \geq T/k$ logo no suporte de φ_1 temos que $|y| \geq b_0^{1/2}/\sqrt{7}$, logo $1/|y|^{1/2} \lesssim 1/b_0^{1/4}$, portanto que $h(y) = \varphi_1/|y|^{1/2} \lesssim 1/|a_1|^{1/4}$ além disso

$$\left| \frac{d^2\phi}{dy^2}(y) \right| = |6(y+a_0)| \geq b_0^{1/2}\sqrt{6}, \tag{1.44}$$

e por ter h menos de 15 intervalos de monotonia usando o Lema 1.4 concluímos que $S_1 \lesssim 1/|a_1|^{1/2}$.

Consideramos S_2, no suporte de φ_2 temos $|3(y+a_0)^2-b_0|>b_0/3$ e portanto

$$\left|\frac{d\phi}{dy}(y)\right| = |3(y+a_0)^2-b_0| \geq \frac{3}{8}(y+a_0)^2+\frac{1}{6}b_0. \tag{1.45}$$

Seja $D=\{1/|a_1|\leq |y|\leq c_0\}$, integrando por partes como em (1.36) tem-se

$$\begin{aligned}
|S_2| =& \Big|\int_D \frac{\varphi_2(y)}{|y|^{1/2}\frac{d\phi}{dy}}\frac{d}{dy}(e^{i\phi})dy\Big| \\
\leq& \Big|\int_D \frac{\varphi_2'(y)}{|y|^{1/2}\frac{d\phi}{dy}}e^{i\phi}dy\Big| + \frac{1}{2}\Big|\int_D \frac{\varphi_2(y)}{|y|^{3/2}\frac{d\phi}{dy}}e^{i\phi}dy\Big| + \Big|\int_D \frac{\varphi_2(y)}{|y|^{1/2}}e^{i\phi}\frac{\frac{d^2\phi}{dy^2}}{(\frac{d\phi}{dy})^2}dy\Big| \\
=& F_1+F_2+F_3.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Em F_2 temos a mesma estimativa que em (1.37)

$$F_2 \lesssim \int_{1/|a_1|\leq|y|\leq c_0} \frac{1}{|y|^{3/2}[(y+a_0)^2+b_0]}dy \lesssim \frac{|a_1|^{1/2}}{b_0} \lesssim \frac{1}{|a_1|^{1/2}}. \tag{1.47}$$

Temos em F_3

$$\begin{aligned}
|F_3| \lesssim& \int_D \frac{|y+a_0|}{|y|^{1/2}(b_0+(y+a_0)^2)^2}dy \lesssim |a_1|^{1/2}\int_{\mathbb{R}} \frac{|y+a_0|}{(b_0+(y+a_0)^2)^2}dy \\
\lesssim& |a_1|^{1/2}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|}{(b_0+\xi^2)^2}d\xi \\
\lesssim& \frac{|a_1|^{1/2}}{b_0}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\xi|}{(1+\xi^2)^2}d\xi \\
\lesssim& \frac{1}{|a_1|^{1/2}},
\end{aligned} \tag{1.48}$$

onde se usou que $b_0\geq |a_1|$ por (1.41), o mesmo argumento para F_1

$$F_1 \lesssim \int_D \frac{dy}{|y|^{1/2}[(y+a_0)^2+b_0]} \lesssim \frac{1}{b_0}\int_{|y|\leq c_0} \frac{dy}{|y|^{1/2}} \lesssim \frac{c_0^{1/2}}{|a_1|} \lesssim \frac{1}{|a_1|^{1/2}}, \tag{1.49}$$

onde usamos que $c_0=|a_1|^{1/2}+3|a_0|$ e por (1.41) que $b_0\geq|a_1|$. De (1.46), (1.47), (1.48) e (1.49) segue-se que $|S_2|\lesssim 1/|a_1|^{1/2}$.

Isto prova o lema. □

Teorema 1.3. *Seja $U(t)$ o grupo unitário definido em (14), se $T\in(0,T_0/2)$ temos que*

$$\|U(t)u_0\|_{\mathbf{L^4_xL^\infty_T}} \leq c(1+T)^{1/4}\|u_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}}, \tag{1.50}$$

onde c é uma constante independente de T e u_0.

Demonstração: Sejam $T \in (0, T_0/2)$, e $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([-T_0, T_0])$, $\varphi(t) = 1$ em $[-T, T]$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $supp\, \varphi = [-\min\{1, T_0/2\} - T, \min\{1, T_0/2\} + T]$, consideramos o operador

$$V(t)u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ib_3(t)\xi^3 + ib_2(t)\xi^2 + ix\xi} \frac{1}{|\xi|^{1/4}} \mathcal{F}(u_0)(\xi) d\xi. \tag{1.51}$$

Basta provar então que:

$$\|V(t)u_0\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_T}} \leq \|\varphi(t)V(t)u_0\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_t}} \leq c(1+T)^{1/4}\|u_0\|_{\mathbf{L^2}}, \tag{1.52}$$

onde $c = c(a, T_0)$. Por dualidade, para provar (1.52), é suficiente provar que

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\widetilde{V}(t)g(\cdot, t)(x)dt \Big\|_{\mathbf{L^2_x}} \leq c(1+T)^{1/4}\|g\|_{\mathbf{L^{4/3}_x L^1_t}}, \tag{1.53}$$

onde

$$\widetilde{V}(t)g(\cdot, t)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ib_3(t)\xi^3 - ib_2(t)\xi^2 + i\xi x} \frac{1}{|\xi|^{1/4}} \mathcal{F}g(\cdot, t)(\xi) d\xi,$$

e $\mathcal{F}g(\cdot, t)$ é a transformada de Fourier de g na primeira variável. Temos que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\widetilde{V}(t)g(\cdot, t)(x)dt = \mathcal{F}^{-1}(F)(x),$$

onde

$$F(x) = \frac{1}{|x|^{1/4}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ixy - ib_3(t)x^3 - ib_2(t)x^2} \varphi(t)g(y, t)dtdy.$$

Portanto, usando os teoremas de Plancherel, Fubini e Hölder obtemos:

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\widetilde{V}(t)g(\cdot, t)(x)dt \Big\|^2_{\mathbf{L^2_x}} &= \int_{\mathbb{R}} F(x)\overline{F(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \overline{g(\eta, \tau)} \int_{\mathbb{R}} V(\tau, t)g(\cdot, t)(\eta) dt d\tau d\eta & (1.54) \\
&\leq \|g\|_{\mathbf{L^{4/3}_\eta L^1_\tau}} \Big\| \int_{\mathbb{R}} V(\tau, t)g(\cdot, t)(\eta)dt \Big\|_{\mathbf{L^4_\eta L^\infty_\tau}}, & (1.55)
\end{aligned}$$

onde

$$V(\tau, t)g(\cdot, t)(\eta) = \varphi(\tau)\varphi(t) \int_{\mathbb{R}} e^{i((b_3(t) - b_3(\tau))x^3 + (b_2(t) - b_2(\tau))x^2 + x\eta)} \frac{1}{|x|^{1/2}} \mathcal{F}g(\cdot, t)(x)dx, \tag{1.56}$$

e $\mathcal{F}g(\cdot,t)$ é a transformada de Fourier de g na primeira variável. Portanto, para finalizar a prova do teorema, é suficiente provar que:

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}} V(\tau,t) g(\cdot,t)(\eta) dt \Big\|_{\mathbf{L}^4_\eta \mathbf{L}^\infty_\tau} \leq c(1+T)^{1/2} \|g\|_{\mathbf{L}^{4/3}_\eta \mathbf{L}^1_\tau}. \tag{1.57}$$

Seja:

$$I^{t,\tau}(\eta) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\tau)\varphi(t) e^{i((b_3(t)-b_3(\tau))x^3+(b_2(t)-b_2(\tau))x^2+x\eta)} \frac{1}{|x|^{1/2}} dx.$$

Como $|b_3'(t)| = |\beta(t)| \geq a > 0$, $\forall t \in [-T_0, T_0]$, pelo teorema do Valor Médio, no suporte de $\varphi(\tau)\varphi(t)$ temos

$$\frac{|b_2(t)-b_2(\tau)|}{|b_3(t)-b_3(\tau)|^{2/3}} \leq \frac{M|t-\tau|}{a^{2/3}|t-\tau|^{2/3}} \lesssim \frac{M(1+T)^{1/3}}{a^{2/3}}.$$

Logo, usando o teorema de Fubini e o Lema 1.5,

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{R}} V(\tau,t) g(\cdot,t)(\eta) dt \Big| &= \Big| \int_{\mathbb{R}} [g(\cdot,t) * I^{t,\tau}(\cdot)](\eta)\, dt \Big| \\ &\leq c(1+T)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|g(y,\cdot)\|_{\mathbf{L}^1_t}}{|\eta-y|^{1/2}} dy. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Agora do teorema de Integração Fracionária com $q = 4, p = 4/3, \alpha = 1/2$ obtemos (1.57). Desta maneira conclui-se a demonstração do teorema. □

Observação 1.3. *1) Para provar a desigualdade (1.53), sabemos que o conjunto* $\mathbf{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathbf{S}(\mathbb{R})$ *das combinações lineares finitas da forma* $\sum_j a_j(x) b_j(t)$, *com* $a_j, b_j \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$, *é denso em* $\mathbf{L}^{4/3}_\mathbf{x} \mathbf{L}^1_\mathbf{t}$, *logo consideramos* g *neste espaço.*

2) Observamos que nesta prova somente precisamos que α *e* β *sejam contínuas.*

Como corolários dos teoremas acima e usando interpolação complexa como no Corolário 3.8 e Proposição 3.17 de [28] de (1.15) e (1.50), para $T \in (0, T_0/2)$ obtemos que

$$\|U(t)u_0\|_{\mathbf{L}^5_\mathbf{x}\mathbf{L}^{10}_\mathbf{T}} \leq C(1+T)^{1/2}\|u_0\|_{\mathbf{L}^2} \tag{1.59}$$

$$\|D_x^{1/4}U(t)u_0\|_{\mathbf{L}^5_\mathbf{x}\mathbf{L}^{10}_\mathbf{T}} \leq C(1+T)^{1/2}\|u_0\|_{\mathbf{H}^{1/4}} \tag{1.60}$$

$$\|D_xU(t)u_0\|_{\mathbf{L}^{20}_\mathbf{x}\mathbf{L}^{5/2}_\mathbf{T}} \leq C(1+T)^{1/2}\|u_0\|_{\mathbf{H}^{1/4}}. \tag{1.61}$$

A segunda desigualdade segue-se de (1.59) pois $D_x^s U(t)u_0 = U(t)D_x^s u_0$.

1.1.3 Estimativas Tipo Strichartz

Consideramos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} u_t - i\alpha_0(t)u - \beta_0(t)u_x + i\alpha(t)u_{xx} + \beta(t)u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{1.62}$$

onde $\alpha_0(t), \alpha(t), \beta_0(t), \beta(t)$ reais e contínuas, $\beta(t) \neq 0$ para todo $t \in [-T_0, T_0]$.

Seja:

$$V(t)u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\phi(\xi,t)+ix\xi}\mathcal{F}(u_0)(\xi)d\xi = u_0 * I_t^{\phi}(x), \tag{1.63}$$

solução de (1.62), onde $I_t^{\phi}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\phi(\xi,t)+ix\xi}d\xi$ e

$$\begin{aligned} \phi(\xi,t) =& \int_0^t \alpha_0(s)ds + \xi\int_0^t \beta_0(s)ds + \xi^2\int_0^t \alpha(s)ds + \xi^3\int_0^t \beta(s)ds \\ =& b_0(t) + b_1(t)\xi + b_2(t)\xi^2 + b_3(t)\xi^3. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Como $\beta \neq 0$, para $T_0 > 0$ existe $a = a(T_0)$ tal que $|\beta(t)| \geq a > 0 \quad \forall t \in [-T_0, T_0]$, pela continuidade de β temos que $|b_3(t)| \geq a|t|$. Vamos estabelecer a seguinte estimativa do tipo Strichartz para soluções de (1.62),

Teorema 1.4. *Se $v_0 \in \mathbf{L^2}$, $T \in (0, T_0/2)$, $2 \leq q \leq \infty$, e p tal que*

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3q}$$

então

$$\|V(t)v_0\|_{\mathbf{L^p_T L^q_x}} \leq c\|v_0\|_{\mathbf{L^2}}. \tag{1.65}$$

Precisamos primeiro provar o seguinte lema.

Lema 1.6. *Sejam $Lu_0(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\phi(\xi)+ix\xi}\mathcal{F}(u_0)(\xi)d\xi = u_0 * I^{\phi}(x)$, com*

$$I^{\phi}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\phi(\xi)+ix\xi}d\xi, \quad \phi(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3,$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$, $a_3 \neq 0$, $u_0 \in \mathbf{L^{q'}}$, e $0 \leq \theta \leq 1$ tal que $1/q = (1-\theta)/2$. Então

$$\|Lu_0\|_{\mathbf{L^q}} \leq C\frac{1}{|a_3|^{\theta/3}}\|u_0\|_{\mathbf{L^{q'}}}, \tag{1.66}$$

onde C é uma constante independente de a_j, $j = 0, \ldots, 3$.

Demonstração: Usaremos o teorema de interpolação de Riesz-Thorin.

Por um lado o teorema de Plancherel nos diz que,

$$\|Lu_0\|_{\mathbf{L^2(R)}} = \|u_0\|_{\mathbf{L^2(R)}}. \tag{1.67}$$

Suponha que a desigualdade

$$|I^\phi(x)| \lesssim |a_3|^{-1/3}. \tag{1.68}$$

é válida. Então segue diretamente que

$$\|Lu_0(\cdot)\|_{\mathbf{L^\infty(R)}} \lesssim |a_3|^{-1/3}\, \|u_0\|_{\mathbf{L^1(R)}} \tag{1.69}$$

é válida.

Agora pelo teorema de interpolação de Riesz-Thorin, (1.66) segue de (1.69) e (1.67).

Provemos (1.68): temos

$$I^\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3)+ix\xi} d\xi. \tag{1.70}$$

Se $\xi = kz$, $k = \dfrac{a_2}{3a_3}$ em (1.70) temos:

$$I^\phi(x) = k\int_{\mathbb{R}} e^{i(zc_1+c_3(z+1)^3+c_0)}dz, \tag{1.71}$$

onde $c_1 = \dfrac{a_2 x}{3a_3} + \dfrac{a_1 a_2}{3a_3} - \dfrac{a_2^3}{9a_3^2} = c_1(a_1,a_2,a_3,x)$, $c_3 = k^3 a_3$. Fazemos agora $c_3(z+1)^3 = \xi^3$ em (1.71), então

$$\begin{aligned}|I^\phi(x)| =& |a_3|^{-1/3}\Big|\int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi\theta+\xi^3)}d\xi\Big| \qquad \theta = c_1(c_3)^{-1/3}\\ \lesssim& |a_3|^{-1/3}.\end{aligned}$$

Isto completa a prova do lema. □

A desigualdade anterior será também importante para o estudo da continuação única no seguinte capítulo (Proposição 3.1).

A seguir provaremos o Teorema 1.4, seguindo o mesmo esquema da prova do Teorema 1.3.

Demonstração: **[Teorema 1.4]** Consideramos φ como na prova do Teorema 1.3. Por dualidade basta provar que para todo $g(t,x) \in \mathbf{L_t^{p'}L_x^{q'}}$,

$$\Big|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) g(x,t)\overline{V(t)v_0(x)}dxdt\Big| \leq c\|v_0\|_{\mathbf{L^2}}\|g(x,t)\|_{\mathbf{L_t^{p'}L_x^{q'}}}. \tag{1.72}$$

Usando o teorema de Fubini e a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(t)g(x,t)\overline{V(t)v_0(x)}dxdt\Big|\leq\|v_0\|_{\mathbf{L^2}}\Big\|\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\widetilde{V}(t)g(\cdot,t)dt\Big\|_{\mathbf{L^2}}. \tag{1.73}$$

Logo para provar (1.65) basta que

$$\Big\|\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\widetilde{V}(t)g(\cdot,t)(x)dt\Big\|_{\mathbf{L^2_x}}\leq c\|g\|_{\mathbf{L_t^{p'}L_x^{q'}}}, \tag{1.74}$$

onde

$$\widetilde{V}(t)g(\cdot,t)(x)=\int_{\mathbb{R}}e^{-ib_3(t)\xi^3-ib_2(t)\xi^2-ib_1(t)\xi-ib_0(t)+i\xi x}\mathcal{F}(g(\cdot,t))(\xi)d\xi,$$

a transformada de Fourier de g é na primeira variável. Logo temos

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\widetilde{V}(t)g(\cdot,t)(x)dt=\mathcal{F}^{-1}(F)(x),$$

onde

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}^2}e^{-ixy-ib_3(t)x^3-ib_2(t)x^2-ib_1(t)x-ib_0(t)}\varphi(t)g(y,t)dtdy.$$

Portanto, usando os teoremas de Plancherel, Fubini e Hölder:

$$\begin{aligned}\Big\|\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\widetilde{V}(t)g(\cdot,t)(x)dt\Big\|^2_{\mathbf{L^2_x}}&=\int_{\mathbb{R}}F(x)\overline{F(x)}dx\\&=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\overline{g(\eta,\tau)}\int_{\mathbb{R}}V(\tau,t)g(\cdot,t)(\eta)dtd\tau d\eta &(1.75)\\&\leq\|g\|_{\mathbf{L_t^{p'}L_\eta^{q'}}}\Big\|\int_{\mathbb{R}}V(\tau,t)g(\cdot,t)(\eta)dt\Big\|_{\mathbf{L_t^{p}L_\eta^{q}}}, &(1.76)\end{aligned}$$

onde

$$V(\tau,t)g(\cdot,t)(\eta)=\varphi(\tau)\varphi(t)\int_{\mathbb{R}}e^{i((b_3(t)-b_3(\tau))x^3+(b_2(t)-b_2(\tau))x^2+(b_1(t)-b_1(\tau))x+x\eta)}\mathcal{F}g(\cdot,t)(x)dx, \tag{1.77}$$

a transformada de Fourier de g é na primeira variável. Para terminar a prova do teorema basta provar que

$$\Big\|\int_{\mathbb{R}}V(\tau,t)g(\cdot,t)(\eta)dt\Big\|_{\mathbf{L_t^{p}L_\eta^{q}}}\leq c\|g\|_{\mathbf{L_t^{p'}L_\eta^{q'}}}. \tag{1.78}$$

Seja:

$$I^{t,\tau}(\eta) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\tau)\varphi(t)\, e^{i((b_3(t)-b_3(\tau))x^3+(b_2(t)-b_2(\tau))x^2+(b_1(t)-b_1(\tau))x+x\eta)}dx.$$

Como $|b_3'(t)| = |\beta(t)| \geq a > 0$, $\forall t \in [-T_0, T_0]$ pelo teorema do Valor Médio

$$|b_3(t) - b_3(\tau)| \geq a|t-\tau|.$$

Usando o teorema de Fubini e o Lema 1.6 temos:

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_{\mathbb{R}} V(\tau,t)g(\cdot,t)(\eta)dt\Big\|_{\mathbf{L^p_t L^q_\eta}} &\leq \Big\| \int_{\mathbb{R}} \|V(\tau,t)g(\cdot,t)(\eta)\|_{\mathbf{L^q_\eta}} dt\Big\|_{\mathbf{L^p_t}} \\
&\leq \Big\| \int_{\mathbb{R}} \|\,[g(\cdot,t) * I^{t,\tau}(\cdot)\,]\,(\eta)\|_{\mathbf{L^q_\eta}}\, dt\Big\|_{\mathbf{L^p_t}} \\
&\leq C\Big\| \int_{\mathbb{R}} \frac{\|g(t,x)\|_{\mathbf{L^{q'}_x}}}{|t-\tau|^{\theta/3}} dt\Big\|_{\mathbf{L^p_t}} \\
&\leq C\|g\|_{\mathbf{L^{p'}_t L^{q'}_\eta}}. \qquad (1.79)
\end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos o teorema de Integração Fracionária. Desta maneira conclui-se a demonstração do teorema. □

Se $p = q = 8$ no Teorema 1.4, temos

Corolário 1.1. *Se $u_0 \in \mathbf{L^2}$, então*

$$\|V(t)u_0\|_{\mathbf{L^8_x L^8_T}} \leq c\,\|u_0\|_{\mathbf{L^2_x}}. \qquad (1.80)$$

Para trabalhar com a parte não linear da equação HK, precisamos dos seguintes resultados:

A regra de Leibniz para derivadas fracionárias diz que

Teorema 1.5. *Sejam $\alpha \in (0,1)$, α_1, $\alpha_2 \in [0,\alpha]$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Seja $p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \in (0,\infty)$ com $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$. Então*

$$\|D_x^\alpha(fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f\|_{\mathbf{L^p_x L^q_T}} \leq c\|D_x^{\alpha_1} f\|_{\mathbf{L^{p_1}_x L^{q_1}_T}}\, \|D_x^{\alpha_2} g\|_{\mathbf{L^{p_2}_x L^{q_2}_T}}. \qquad (1.81)$$

Além disso se $\alpha_1 = 0$ o valor $q_1 = \infty$ é permitido.

Demonstração: Veja o Teorema $A.8$ em [28]. □

Uma versão vetorial da regra da cadeia para derivadas fracionárias é dado pelo

Teorema 1.6. *Sejam $\alpha \in (0,1)$ e $p, q, p_1, p_2, q_2 \in (1, \infty)$, $q_1 \in (1, \infty]$ tal que*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \; e \; \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}.$$

Então

$$\|D_x^\alpha f(v)\|_{\mathbf{L_x^pL_T^q}} \leq c\|f'(v)\|_{\mathbf{L_x^{p_1}L_T^{q_1}}} \|D_x^\alpha(v)\|_{\mathbf{L_x^{p_2}L_T^{q_2}}}. \tag{1.82}$$

Demonstração: Veja o Teorema $A.6$ em [28]. □

Uma versão escalar da regra da cadeia para derivadas fracionárias é dado pelo

Teorema 1.7. *Sejam $\alpha \in (0,1)$, $1 < p < \infty$, $r > 1$. Então*

$$\|D_x^\alpha f(v)\|_{\mathbf{L^p}} \leq c\|f'(v)\|_{\mathbf{L^\infty}} \|D_x^\alpha(v)\|_{\mathbf{L^p}}. \tag{1.83}$$

Demonstração: Veja o Teorema $A.7$ em [28]. □

Temos a seguinte proposição

Proposição 1.1. *Se $u \in \mathbf{H^s}$, $s \geq 1/4$, $v \in \mathbf{L^2}$, $T \in (0, T_0/2)$ então*

$$\begin{aligned}
\|\partial_x U(\tau,t)v\|_{\mathbf{L_x^\infty L_T^2}} &\leq C(1+T)^{1/2}\|v\|_{\mathbf{L^2}}, &(1.84)\\
\|U(\tau,t)u\|_{\mathbf{L_x^4 L_T^\infty}} &\leq C(1+T)^{1/2}\|u\|_{\mathbf{H^s}}, &(1.85)\\
\|U(\tau,t)v\|_{\mathbf{L_x^5 L_T^{10}}} &\leq C(1+T)^{1/2}\|v\|_{\mathbf{L^2}}, &(1.86)\\
\|D_x^s U(\tau,t)u\|_{\mathbf{L_x^5 L_T^{10}}} &\leq C(1+T)^{1/2}\|u\|_{\mathbf{H^s}}, &(1.87)\\
\|D_x U(\tau,t)u\|_{\mathbf{L_x^{20} L_T^{5/2}}} &\leq C(1+T)^{1/2}\|u\|_{\mathbf{H^s}}. &(1.88)
\end{aligned}$$

Demonstração: Das demonstrações dos Teoremas 1.2 e 1.3 acima, é fácil ver que, para $\tau \in (0, T_0/2)$ fixo tem-se também para $U(\tau, t)$ o Efeito de Regularização Local, a Estimativa da Função Maximal e as desigualdades (1.15), (1.50), (1.59), (1.60) e (1.61). □

1.2 Prova do Teorema 1.1

Suponhamos $v \in Z_{a,T}$, pela Proposição 1.1 e por ser $U(\tau, t)$ unitário em $\mathbf{H^s}$ temos que

$$\begin{aligned}
|||U(t)u_0|||_T \leq & C(1+T)^{1/2}\|u_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}},\\
|||U(\tau,t)F(v(\tau))|||_T \leq & C(1+T)^{1/2}\|F(v(\tau))\|_{\mathbf{H^{1/4}}}.
\end{aligned}$$

Assim em 1.11 tem-se

$$
\begin{aligned}
|||\Phi(v)|||_T \leq & C(1+T)^{1/2}\Big[\|u_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}} + \int_{-T}^{T} \|D_x^{1/4}F(v)\|_{\mathbf{L^2}} + \|F(v)\|_{\mathbf{L^2}} d\tau\Big] \\
\leq & C(1+T)^{1/2}\|u_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}} + C(1+T)^{1/2}T^{1/2}(\|D_x^{1/4}F(v)\|_{\mathbf{L_x^2L_T^2}} \\
& + \|F(v)\|_{\mathbf{L_x^2L_T^2}}).
\end{aligned} \tag{1.89}
$$

Os termos de $F(v)$ com derivada, estimam-se como na modificada KdV (ver prova do Teorema 2.3, pag. 584 de [28]), assim

$$
\|\delta|v|^2v_x + \epsilon v^2\overline{v_x}\|_{\mathbf{L_x^2L_T^2}} \leq C|||v|||_T^3, \;\; \|D_x^{1/4}(\delta|v|^2v_x + \epsilon v^2\overline{v_x})\|_{\mathbf{L_x^2L_T^2}} \leq C|||v|||_T^3
$$

Para terminar a prova do teorema, estimamos o termo sem derivadas $|v|^2v$, usando as desigualdades de Hölder e Cauchy-Schwarz temos

$$
\begin{aligned}
\||v|^2v\|_{\mathbf{L_x^2L_T^2}} \leq & \|v\|_{\mathbf{L_x^4L_T^\infty}}\|v^2\|_{\mathbf{L_x^4L_T^2}} \leq T^{1/4}\|v\|_{\mathbf{L_x^4L_T^\infty}}\|v^2\|_{\mathbf{L_x^4L_T^4}} \\
= & T^{1/4}\|v\|_{\mathbf{L_x^4L_T^\infty}}\|v\|^2_{\mathbf{L_x^8L_T^8}} \leq T^{1/4}|||v|||_T^3.
\end{aligned} \tag{1.90}
$$

Agora, usando a regra de Leibnitz para derivadas fracionárias, (1.81) com $\alpha_1 = 0$, $q_1 = \infty$ junto com desigualdade de Hölder temos

$$
\|D_x^{1/4}(|v|^2v)\|_{\mathbf{L_x^2L_T^2}} \leq C\|v\|_{\mathbf{L_x^4L_T^\infty}}\|D_x^{1/4}|v|^2\|_{\mathbf{L_x^4L_T^2}} + C\|\,|v|^2D_x^{1/4}v\|_{\mathbf{L_x^2L_T^2}}. \tag{1.91}
$$

Mas agora usando a regra da cadeia vetorial (1.82), com $f(x) = |x|^2$, logo $|f'(x)| \leq 2|x|$, $|f'(v)| \leq 2|v|$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\|D_x^{1/4}|v|^2\|_{\mathbf{L_x^4L_T^2}} \leq & T^{1/4}\|D_x^{1/4}|v|^2\|_{\mathbf{L_x^4L_T^4}} \leq CT^{1/4}\|v\|_{\mathbf{L_x^8L_T^8}}\|D_x^{1/4}v\|_{\mathbf{L_x^8L_T^8}} \\
\leq & CT^{1/4}|||v|||_T^2.
\end{aligned} \tag{1.92}
$$

Pela desigualdade de Hölder tem-se que,

$$
\begin{aligned}
\|\,|v|^2D_x^{1/4}v\|_{\mathbf{L_x^2L_T^2}} \leq & \|v\|_{\mathbf{L_x^4L_T^\infty}}\,\|\,|v|D_x^{1/4}v\|_{\mathbf{L_x^4L_T^2}} \\
\leq & T^{1/4}\|v\|_{\mathbf{L_x^4L_T^\infty}}\|v\|_{\mathbf{L_x^8L_T^8}}\|D_x^{1/4}v\|_{\mathbf{L_x^8L_T^8}} \\
\leq & T^{1/4}|||v|||_T^3.
\end{aligned} \tag{1.93}
$$

Portanto de (1.90), (1.91), (1.92) e (1.93) obtemos

$$
\||v|^2v\|_{\mathbf{L_x^2L_T^2}} + \|D_x^{1/4}(|v|^2v)\|_{\mathbf{L_x^2L_T^2}} \lesssim T^{1/4}|||v|||_T^3,
$$

em conseqüência,

$$
\|D_x^{1/4}F(v)\|_{\mathbf{L_x^2L_T^2}} + \|F(v)\|_{\mathbf{L_x^2L_T^2}} \leq C(1+T)^{1/4}|||v|||_T^3. \tag{1.94}
$$

Portanto como $v \in Z_{a,T}$ temos

$$|||\Phi(v)|||_T \leq C(1+T)^{1/2}\|u_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}} + C(1+T)^{3/4}T^{1/2}a^3. \tag{1.95}$$

Logo se tomamos

$$a = 2C(1+T)^{1/2}\|u_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}} \quad , \quad CT^{1/2}(1+T)^{3/4}a^2 \leq 1/2,$$

então temos que $u = \Phi(v) \in Z_{a,T}$. Tomando $T \in (0, T_0/2)$ tal que,

$$T(1+T)^{7/2} \leq C\frac{1}{\|u_0\|^4_{\mathbf{H^{1/4}}}}. \tag{1.96}$$

Vejamos que $\Phi : Z_{a,T} \to Z_{a,T}$ é uma contração, sejam $v, w \in Z_{a,T}$ temos

$$|||\Phi(v) - \Phi(w)|||_T \leq CT^{1/2}(T+1)^{1/2}\|F(v) - F(w)\|_{\mathbf{H^{1/4}}},$$

como em (4.14) de [28] obtemos que

$$\|\delta|v|^2 v_x + \epsilon v^2\overline{v_x} - \delta|w|^2 w_x - \epsilon w^2\overline{w_x}\|_{\mathbf{H^{1/4}}} \leq C(|||v|||_T + |||w|||_T)^2|||v-w|||_T$$

e usando o fato de que $|v|^2v - |w|^2w = (v-w)(v+w)\overline{v} + w^2(\overline{v-w})$, as mesmas estimativas feitas acima provam que $|||v|^2v - |w|^2w\|_{\mathbf{H^{1/4}}} \leq CT^{1/4}(|||v|||_T + |||w|||_T)^2|||v-w|||_T$, logo

$$|||\Phi(v) - \Phi(w)|||_T \leq CT^{1/2}(1+T)^{3/4}(|||v|||_T + |||w|||_T)^2|||v-w|||_T,$$

e para $T_1 \in (0, T)$

$$\begin{aligned} |||\Phi_{u_0}(v) - \Phi_{\tilde{u}_0}(w)|||_{T_1} \leq & C(1+T_1)^{1/2}\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}} \\ & + CT_1^{1/2}(1+T_1)^{3/4}(|||v|||_{T_1} + |||w|||_{T_1})^2|||v-w|||_{T_1}, \end{aligned}$$

logo existe um único $u \in Z_{a,T}$, tal que $\Phi_{u_0}(u) = u$ e $|||u|||_T \lesssim \|u_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}}$, o mesmo análise feito em [28] (prova do Teorema 2.1, caso k=1) permite obter unicidade em Z_T, o PVI (1.2) é localmente bem posto em $\mathbf{H^s}(\mathbb{R})$ para $s = 1/4$.

A prova para o caso geral $s \geq 1/4$, segue-se combinando o resultado para $s = 1/4$ e o fato de que em todas as estimativas usadas na demonstração, as derivadas de maior ordem (após da interpolação) aparecem linearmente. Isto encerra a demonstração do Teorema 1.1. □

Observação 1.4. *1) Da Prova do Teorema 1.1 vemos que (1.2) é localmente bem posto em $\mathbf{H^s}(\mathbb{R})$ para $s \geq 1/4$ no caso da não linearidade mais geral*

$$\rho_1 u(g * |u|^2) + i\rho_2 u(g * (\partial_x|u|^2)) + i\rho_2(\partial_x u)(g * |u|^2)$$

em particular para a não linearidade considerada em [38]:

$$\delta_1 u(g * |u|^2) + i\delta_2 \partial_x [u(g * |u|^2)],$$

onde g é soma de uma delta de Dirac com uma função integrável e $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{C}$, pois se $g \in \mathbf{L^1}$ tem-se que:

$$\begin{aligned}
\|g * v\|_{\mathbf{L^p_x L^q_T}} &\leq \|g\|_{\mathbf{L^1}} \|v\|_{\mathbf{L^p_x L^q_T}}, \\
\|g * v\|_{\mathbf{L^q_T L^p_x}} &\leq \|g\|_{\mathbf{L^1}} \|v\|_{\mathbf{L^q_T L^p_x}}, \\
\|D_x^{s_1} \partial_x^{s_2} (g * v)\|_{\mathbf{L^p_x L^q_T}} &\leq \|g\|_{\mathbf{L^1}} \|D_x^{s_1} \partial_x^{s_2} v\|_{\mathbf{L^p_x L^q_T}}, \\
\|D_x^{s_1} \partial_x^{s_2} (g * v)\|_{\mathbf{L^q_T L^p_x}} &\leq \|g\|_{\mathbf{L^1}} \|D_x^{s_1} \partial_x^{s_2} v\|_{\mathbf{L^q_T L^p_x}},
\end{aligned}$$

com $1 \leq p, q \leq \infty$ $s_1, s_2 \geq 0$, pois $g = g(x)$ não depende da variável t e

$$D_x^{s_1} \partial_x^{s_2} (g * v) = (g * D_x^{s_1} \partial_x^{s_2} v), \quad \|g * v\|_{\mathbf{L^p}} \leq \|g\|_{\mathbf{L^1}} \|v\|_{\mathbf{L^p}},$$

portanto nas estimativas feitas na prova do Teorema 1.1, $g * v$ se estima como v.
2) De (1.96) vemos que se $T_0 = \infty$ e $\|\alpha^{(j)}\|_{\mathbf{L^\infty(\mathbb{R})}} < \infty$, $\|\beta^{(i)}\|_{\mathbf{L^\infty(\mathbb{R})}} < \infty$ para $j = 0, 1, 2, 3$, $i = 0, 1, \ldots, 4$, podemos obter o tempo de existência local $T = T(\|u_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}})$ tal que $T(\rho) \to \infty$ se $\rho \to 0$.

Capítulo 2

Existência Global de Soluções da Equação de Hasegawa Kodama com coeficientes constantes

Consideramos a equação HK com coeficientes constantes.

$$\begin{cases} \partial_t u + i\alpha\partial_x^2 u + \beta\partial_x^3 u + F(u) = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & x, t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $F(u) := i\gamma|u|^2 u + \delta|u|^2\partial_x u + \epsilon u^2 \partial_x \overline{u}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0, \ \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}.$

Laurey em [37] provou que (2.1) é globalmente bem posto em $\mathbf{H^1}$ quando α e $\beta \neq 0$ são constantes. Neste capítulo daremos uma resposta positiva para a pergunta sobre a existência global de soluções em $\mathbf{H^s}$, $1/4 < s < 1$.

Da teoria local obtida por Staffilani ([48]), para o problema (2.1), temos o seguinte teorema

Teorema 2.1. *Sejam $u_0 \in \mathbf{H^s}(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$, $\gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{C}$, então para T satisfazendo*

$$T \leq C \min\left\{\frac{1}{\|u_0\|^4_{\mathbf{H^{1/4}}}}, \frac{1}{\|u_0\|^{8/3}_{\mathbf{H^{1/4}}}}\right\}. \tag{2.2}$$

existe uma única solução do Problema de Valor Inicial (2.1), tal que

$$u \in \mathcal{C}([0,T]; \mathbf{H^s}(\mathbb{R})), \tag{2.3}$$

$$\|\partial_x u\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_T}} + \|D_x^s \partial_x u\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_T}} < \infty, \tag{2.4}$$

$$\|D_x^{s-1/4}\partial_x u\|_{\mathbf{L^{20}_x L^{5/2}_T}} < \infty, \tag{2.5}$$

$$\|u\|_{\mathbf{L^5_x L^{10}_T}} + \|D_x^s u\|_{\mathbf{L^5_x L^{10}_T}} < \infty, \tag{2.6}$$

$$\|u\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_T}} < \infty, \tag{2.7}$$

$$\|u\|_{\mathbf{L^8_x L^8_T}} + \|D_x^s u\|_{\mathbf{L^8_x L^8_T}} < \infty. \tag{2.8}$$

Alem disso para qualquer $T' \in [-T,T]$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de $u_0 \in \mathbf{H^s}(\mathbb{R})$, $s \geq 1/4$, tal que a aplicação $\tilde{u}_0 \to \tilde{u}(t)$, de $\mathcal{V}$ na classe definida por (2.4)-(2.8), com T' no lugar de T é Lipschitz.

Usaremos uma modificação do argumento de Fonseca, Linares, Ponce [13] para a equação mKdV baseado no trabalho de Bourgain [4] para provar que (2.1) é globalmente bem posto em $\mathbf{H^s}$ para $s > 5/9$. Provaremos o seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Seja $s > 5/9$, então para qualquer $u_0 \in \mathbf{H^s}$ a única solução do PVI (2.1) encontrada no Teorema 2.1 se estende para qualquer intervalo $[0,T]$. Além disto,*

$$u(t) = U(t)u_0 + g(t),$$

com

$$\sup_{[0,T]} \|g(t)\|_{\mathbf{H}^\theta} \leq CT^{2\theta(1-s)/((4+\theta)s-(2+\theta))}, \tag{2.9}$$

para $1/2 \leq \theta \leq 1$.

Consideramos o PVI (2.1),

$$\begin{aligned} \partial_t u + i\alpha\partial_x^2 u + \beta\partial_x^3 u + i\gamma|u|^2 u + \delta|u|^2\partial_x u + \epsilon u^2\partial_x\overline{u} &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{2.10}$$

com $u_0 \in \mathbf{H^s}$, $1/4 < s < 1$. Para N fixo decompomos u_0 como em [4],

$$u_0(x) = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{\{|\xi|<N\}}\mathcal{F}(u_0))(x) + \mathcal{F}^{-1}(\chi_{\{|\xi|\geq N\}}\mathcal{F}(u_0))(x) = v_0(x) + w_0(x). \tag{2.11}$$

Em conseqüência,

$$\|v_0\|_{\mathbf{L^2}} \leq \|u_0\|_{\mathbf{L^2}}, \quad \|v_0\|_{\mathbf{H^1}} \leq \|u_0\|_{\mathbf{H^s}} N^{\{1-s\}}. \tag{2.12}$$

e

$$\|w_0\|_{\mathbf{H}^\rho} \leq \|u_0\|_{\mathbf{H^s}} N^{\{\rho-s\}}, \qquad 0 \leq \rho \leq s. \tag{2.13}$$

Consideramos o seguinte PVI.

$$\begin{cases} v_t + i\alpha\partial_x^2 v + \beta\partial_x^3 v + F(v) = 0, & x,t \in \mathbb{R}, \\ v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{2.14}$$

com $F(v) = i\gamma|v|^2 v + \delta|v|^2 v_x + \epsilon v^2\overline{v_x}$, pelo Teorema 2.1 provaremos existência local em $[0,\Delta T]$ com $\Delta T \sim N^{-(1-s)}$.

Notamos que a solução do PVI (2.10) pode-se escrever como

$$u(x,t) = v(x,t) + U(t)w_0(x) + z(x,t), \tag{2.15}$$

para qualquer $t \in [0, \Delta T]$, onde $w := w(x,t) := U(t)w_0(x) + z(x,t)$ é solução do PVI

$$\begin{cases} w_t + i\alpha\partial_x^2 w + \beta\partial_x^3 w + F(v+w) - F(v) = 0, \quad x,t \in \mathbb{R}, \\ w(x,0) = w_0(x), \end{cases} \tag{2.16}$$

provaremos existência local de w no mesmo intervalo de tempo $[0, \Delta T]$.

Seja $T > 0$, queremos estender a solução u para todo o intervalo $[0,T]$, para fazer isto precisamos conhecer como é o crescimento da solução em cada intervalo de tamanho ΔT. Temos que para $1/2 \leq \theta \leq 1$, a norma $\|v\|_{\mathbf{L}^\infty_\mathbf{t}\mathbf{H}^\theta}$ cresce como $N^{\theta(1-s)}$ e em cada etapa a norma $\|z\|_{\mathbf{L}^\infty_{\Delta\mathbf{T}}\mathbf{H}^\theta}$ cresce como $N^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}$.

Para alcançar o tempo T, o número de etapas na iteração é como $T\Delta T^{-1} \sim TN^{(1-s)}$, precisamos que a norma em $\mathbf{H}^\theta$ de $z(t)$ tenha o mesmo crescimento uniforme como $N^{\theta(1-s)}$ (para poder garantir o mesmo tempo de existência local ΔT, em cada iteração), e isso acontece quando $s > 5/9$. Ver os detalhes na prova do Teorema 2.2, na parte final deste capítulo.

Antes de provar o Teorema 2.2, precisaremos de algumos resultados preliminares.

2.1 Estimativas Lineares

Seja $U(t)$ o grupo unitário que define as soluções do PVI linear associado a (2.1). Mais precisamente,

$$U(t)u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\phi(\xi)t + ix\xi}\mathcal{F}(u_0)(\xi)d\xi = u_0 * I_t^\phi(x), \tag{2.17}$$

onde

$$I_t^\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi + t\phi(\xi))}d\xi \quad , \quad \phi(\xi) = \beta\xi^3 + \alpha\xi^2. \tag{2.18}$$

2.1.1 Efeitos de Regularização Local

Começamos por enunciar algumos efeitos de regularização local associados a $U(t)$.

Teorema 2.3. *Se* $u_0 \in \mathbf{L^2}$, $D^\theta v_0 \in \mathbf{L^2}$, $0 < \theta \leq 1$ *então*

$$\|\partial_x U(t)u_0\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_T}} \leq C\|u_0\|_{\mathbf{L^2}}, \tag{2.19}$$

$$\|\partial_x U(t)v_0\|_{\mathbf{L^{2/\theta}_x L^2_T}} \leq CT^{\theta/2}\|D^\theta v_0\|_{\mathbf{L^2}}. \tag{2.20}$$

Sejam $0 \leq \theta \leq 1$, $T > 0$, $f \in \mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_T}$, *então*

$$\left\|\partial_x^\theta \int_0^t U(t-t')f(\cdot,t')dt'\right\|_{\mathbf{L^\infty_T L^2_x}} \leq CT^{(1-\theta)/2}\|f\|_{\mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_T}}. \tag{2.21}$$

Demonstração: Para uma prova de (2.19) veja o Lema 4.1 de [48], ver também, (1.15). A estimativa (2.20) obtem-se usando interpolação complexa (Stein, [49]) entre a desigualdade de regularização local (2.19) e a desigualdade

$$\|U(t)u\|_{\mathbf{L^2_x L^2_T}} \leq T^{1/2}\|u\|_{\mathbf{L^2}}. \tag{2.22}$$

Provemos (2.21), usando as desigualdades de Minkowski e Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}\|\partial_x \int_0^t U(t-t')f(\cdot,t')dt'\|_{\mathbf{L^2_x}} &\leq \int_0^t \|\partial_x U(t-t')f(\cdot,t')\|_{\mathbf{L^2_x}}dt' \\ &\leq \int_0^T \|D_x f(\cdot,t')\|_{\mathbf{L^2_x}}dt' \\ &\leq T^{1/2}\|D_x f\|_{\mathbf{L^2_x L^2_T}}.\end{aligned}$$

Agora interpolamos a desigualdade anterior e a versão dual do efeito de regularização local (2.19),

$$\left\|\partial_x \int_0^t U(t-t')f(\cdot,t')dt'\right\|_{\mathbf{L^\infty_T L^2_x}} \leq C\|f\|_{\mathbf{L^1_x L^2_T}},$$

para a interpolação complexa consideramos a família analítica de operadores $T_z g = D_x^{-z}V(t)g$, $z = x + i\theta$, $V(t) = \int_0^t \partial_x U(t-t')g(\cdot,t')dt'$, obtemos assim

$$\left\|\partial_x \int_0^t U(t-t')f(\cdot,t')dt'\right\|_{\mathbf{L^\infty_T L^2_x}} \leq CT^{\theta/2}\|\partial_x^\theta f\|_{\mathbf{L_x^{2/(2-\theta)}L^2_T}}, \tag{2.23}$$

a qual permite deduzir (2.21). □

2.1.2 Estimativas das Funções Maximales

Teorema 2.4. *Se* $v_0 \in \mathbf{H^s}$, $s > 3/4$, $0 < T < 1$, *então*

$$\|U(t)v_0\|_{\mathbf{L^2_x L^\infty_T}} \leq C\|v_0\|_{\mathbf{H^s}}. \tag{2.24}$$

Se $u_0 \in \mathbf{H^{1/4}}$*, então*

$$\|U(t)u_0\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_T}} \leq C\|u_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}}. \tag{2.25}$$

Se $u_0 \in \mathbf{H^{(1+2\theta)/4}}$*,* $0 \leq \theta < 1$ *e* $0 < T < 1$*, então*

$$\|U(t)u_0\|_{\mathbf{L_x^{4/(1+\theta)} L^\infty_T}} \leq C\|u_0\|_{\mathbf{H^{(1+2\theta)/4}}}. \tag{2.26}$$

Se $u_0 \in \mathbf{H^{1/2}}$ *e* $0 < T < 1$*, então*

$$\|U(t)u_0\|_{\mathbf{L_x^{8/3} L^\infty_T}} \leq C\|u_0\|_{\mathbf{H^{1/2}}}. \tag{2.27}$$

Demonstração: A prova da estimativa da Função Maximal (2.24) pode-se ver na Proposição 2.4 de [38]. A prova de (2.25) foi dada no Lema 4.1 de [48], veja também, (1.50). A prova de (2.26) segue-se por interpolação complexa de (2.24) com (2.25), e (2.27) segue-se de (2.26) com $\theta = 1/2$. □

2.1.3 Estimativas Tipo Strichartz

Para a equação HK com coeficientes constantes a prova do Teorema 1.4 é mais simples,

Teorema 2.5. *Se* $u_0 \in \mathbf{L^2}$*,* $f(x,t) \in \mathbf{L_t^{p'} L_x^{q'}}$*,* $2 \leq q \leq \infty$*, e* p *tal que*

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3q}$$

então

$$\|U(t)u_0\|_{\mathbf{L_t^p L_x^q}} \leq C\|u_0\|_{\mathbf{L^2}}. \tag{2.28}$$

$$\Big\| \int_0^t U(t-t')f(\cdot,t')dt' \Big\|_{\mathbf{L^\infty_T L^2_x}} \leq C\|f\|_{\mathbf{L_t^{p'} L_x^{q'}}}. \tag{2.29}$$

Demonstração: Por dualidade basta provar que para todo $\Theta(t,x) \in \mathbf{L_t^{p'} L_x^{q'}}$,

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^2} \Theta(t,x)\overline{U(t)u_0(x)}dxdt \Big| \leq c\|u_0\|_{\mathbf{L^2}} \|\Theta(t,x)\|_{\mathbf{L_t^{p'} L_x^{q'}}}. \tag{2.30}$$

Para ver isto, usando o teorema de Fubini e Cauchy-Schwarz temos

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^2} \Theta(t,x)\overline{U(t)u_0(x)}dxdt \Big| \leq \|u_0\|_{\mathbf{L^2}} \Big\| \int_{\mathbb{R}} U(-t)\Theta(t,\cdot)dt \Big\|_{\mathbf{L^2}}. \tag{2.31}$$

Usando que $U(t)^* = U(-t)$ e a desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_{\mathbb{R}} U(-t)\Theta(t,\cdot)dt \Big\|^2_{\mathbf{L^2}} &= \int_{\mathbb{R}} \Big\langle U(-t)\Theta(t,\cdot), \int_{\mathbb{R}} U(-\tau)\Theta(\tau,\cdot)d\tau \Big\rangle dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big\langle \Theta(t,\cdot), U(t-\tau)\Theta(\tau,\cdot)d\tau \Big\rangle dt \\
&\leq \|\Theta(t,x)\|_{\mathbf{L_t^{p'}L_x^{q'}}} \Big\| \int_{\mathbb{R}} U(t-\tau)\Theta(\tau,\cdot)d\tau \Big\|_{\mathbf{L_t^{p}L_x^{q}}},
\end{aligned}$$

o qual pode ainda ser majorado por

$$\begin{aligned}
&\leq \|\Theta(t,x)\|_{\mathbf{L_t^{p'}L_x^{q'}}} \Big\| \int_{\mathbb{R}} \|U(t-\tau)\Theta(\tau,\cdot)d\tau\|_{\mathbf{L_x^{q}}} d\tau \Big\|_{\mathbf{L_t^{p}}} \\
&\leq \|\Theta(t,x)\|_{\mathbf{L_t^{p'}L_x^{q'}}} \Big\| \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\Theta(t,x)\|_{L_x^{q'}}}{|t-\tau|^{\theta/3}} d\tau \Big\|_{\mathbf{L_t^{p}}} \\
&\leq \|\Theta(t,x)\|^2_{\mathbf{L_t^{p'}L_x^{q'}}},
\end{aligned}$$

onde para a primeira desigualdade usamos Minkowski, para a segunda o Lema 1.6 e para a terceira desigualdade o teorema de Integração Fracionária.

A prova de (2.29) segue-se por dualidade. □

Além das estimativas lineares dadas acima precisaremos das seguintes:

Lema 2.1. *Se* $u_0 \in \mathbf{L^2}$, *então*

$$\begin{aligned}
\|U(t)u_0\|_{\mathbf{L_x^8L_t^8}} &\leq c\|u_0\|_{\mathbf{L_x^2}}. && (2.32)\\
\|U(t)u_0\|_{\mathbf{L_x^5L_t^{10}}} &\leq c\|u_0\|_{\mathbf{L_x^2}}. && (2.33)
\end{aligned}$$

Se $D_x^{1/4}u_0 \in \mathbf{L^2}$, *então*

$$\begin{aligned}
\|\partial_x U(t)u_0\|_{\mathbf{L_x^{20}L_t^{5/2}}} &\leq c\|D_x^{1/4}u_0\|_{\mathbf{L_x^2}}. && (2.34)\\
\|\partial_x U(t)u_0\|_{\mathbf{L_x^8L_T^2}} &\leq cT^{1/8}\|D_x^{1/4}u_0\|_{\mathbf{L_x^2}}. && (2.35)
\end{aligned}$$

Se $D_x^{1/2}u_0 \in \mathbf{L^2}$, *então*

$$\|\partial_x U(t)u_0\|_{\mathbf{L_x^4L_T^2}} \leq cT^{1/4}\|D_x^{1/2}u_0\|_{\mathbf{L_x^2}}. \qquad (2.36)$$

Demonstração: A prova de (2.32) segue-se do Teorema 2.5 acima com p=q=8, para provar (2.36) e (2.35) usamos (2.20) com $\theta = 1/2$ e $\theta = 1/4$ respectivamente. As provas de (2.33) e (2.34) segue-sem de (2.19) e (2.25) como no Lema 4.1 de [48]

Assim o lema fica demonstrado. □

Lema 2.2. *Sejam* $1/4 \leq \theta \leq 1$, $D^\theta u_0 \in \mathbf{L^2}$, *então*

$$\|D_x U(t) u_0\|_{\mathbf{L_x^{40/(20\theta-3)}L_t^{5/2}}} \leq C\, T^{\theta/2-1/8}\, \|D^\theta u_0\|_{\mathbf{L^2_x}}. \tag{2.37}$$

Demonstração: Interpolando o Efeito de Regularização Local (2.19) com a Estimativa da Função Maximal (2.25), temos para $0 \leq \theta \leq 1$

$$\|D_x U(t) u_0\|_{\mathbf{L_x^{5/\theta}L_t^{10/(5-4\theta)}}} \leq C\, \|D^\theta u_0\|_{\mathbf{L^2_x}}. \tag{2.38}$$

Agora interpolamos (2.38) com (2.20) para obter (2.37), pois se $\lambda = 1 - 1/(4\theta)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{20\theta - 3}{40} &= \lambda \frac{\theta}{2} + (1-\lambda)\frac{\theta}{5}. \\ \frac{2}{5} &= \lambda \frac{1}{2} + (1-\lambda)\frac{5-4\theta}{10}. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova do lema. □

A continuação apresentamos algumos resultados preliminares.

2.2 Existência local e estimativas de normas

Em tudo o que segue consideramos N, um número positivo, suficientemente grande que será escolhido depois.

Teorema 2.6. *Consideramos o PVI (2.14), com* v_0 *tal que*

$$\|v_0\|_{\mathbf{L^2}} \leq c \quad , \quad \|v_0\|_{\mathbf{H^1}} \leq c N^{1-s}. \tag{2.39}$$

De (2.2) temos que existe $\Delta T > 0$, $\Delta T \sim N^{-(1-s)}$ *tal que,*

i) A solução v *de (2.14) satisfaz*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|v(t)\|_{\mathbf{H^1}} \lesssim N^{(1-s)}. \tag{2.40}$$

ii) Para $1/4 \leq \rho < 1$ *a solução* v *de (2.14) satisfaz*

$$|||v|||_\rho \lesssim N^{(1-s)\rho}, \tag{2.41}$$

onde

$$\begin{aligned} |||v|||_\rho =& \|v\|_{\mathbf{L^\infty_{\Delta T} H^\rho}} + \|D_x^\rho \partial_x v\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_{\Delta T}}} + \|\partial_x v\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_{\Delta T}}} + \|v\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_{\Delta T}}} \\ &+ \|D_x^\rho v\|_{\mathbf{L^5_x L^{10}_{\Delta T}}} + \|v\|_{\mathbf{L^5_x L^{10}_{\Delta T}}} + \|D_x^{\rho-1/4}\partial_x v\|_{\mathbf{L^{20}_x L^{5/2}_{\Delta T}}} + \|v\|_{\mathbf{L^8_x L^8_T}} \\ &+ \|D_x^\rho v\|_{\mathbf{L^8_x L^8_T}}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Demonstração: De (2.39) por interpolação em espaços de Sobolev temos $\|v_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}}^{-4} \geq CN^{-(1-s)}$ e $\|v_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}}^{-8/3} \geq CN^{-2(1-s)/3}$, portanto

$$\min\left\{\frac{1}{\|v_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}}^4}, \frac{1}{\|v_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}}^{8/3}}\right\} \geq C\min\{N^{-(1-s)}, N^{-2(1-s)/3}\} = CN^{-(1-s)}.$$

Logo por (2.2) do Teorema 2.1, podemos tomar ΔT tal que

$$\Delta T \sim N^{-(1-s)}. \tag{2.43}$$

Usando as leis de conservação (9) e (10), a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\partial_x v|^2 dx \leq & C(|I_2(v_0)| + \int_{\mathbb{R}} |v|^4 dx + \int_{\mathbb{R}} v\partial_x \overline{v} dx) \\
\leq & C|I_2(v_0)| + C\|v\|_{\mathbf{L_x^2}}^3 \|\partial_x v\|_{\mathbf{L_x^2}} + C\|v\|_{\mathbf{L_x^2}}\|\partial_x v\|_{\mathbf{L_x^2}} \\
\leq & C|I_2(v_0)| + 4C^2\|v\|_{\mathbf{L_x^2}}^6 + \frac{1}{4}\|\partial_x v\|_{\mathbf{L_x^2}}^2 + 4C^2\|v\|_{\mathbf{L_x^2}}^2 + \frac{1}{4}\|\partial_x v\|_{\mathbf{L_x^2}}^2.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_{\mathbf{H^1}} \leq & \|v(t)\|_{\mathbf{L_x^2}} + \|\partial_x v(t)\|_{\mathbf{L_x^2}} \\
\leq & \|v_0\|_{\mathbf{L_x^2}} + C(I_2(v_0) + \|v_0\|_{\mathbf{L_x^2}}^6 + \|v_0\|_{\mathbf{L_x^2}}^2)^{1/2},
\end{aligned}$$

onde $C > 0$ constante, função dos coeficientes da equação HK.

Como acima, usando Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Gagliardo Nirenberg é simples provar que $|I_2(v_0)| \lesssim N^{2(1-s)}$, logo obtemos (2.40).

A prova de (2.41) segue-se do Teorema 2.1 pois por interpolação em espaços de Sobolev temos $\|v_0\|_{\mathbf{H}^\rho} \leq cN^{(1-s)\rho}$ e do Teorema 2.1 $|||v(t)|||_\rho \leq C\,\|v_0\|_{\mathbf{H}^\rho}$, $1/4 \leq \rho \leq 1$. $\square$

Teorema 2.7. *Sejam $w_0 \in H^\rho$, com $\|w_0\|_{\mathbf{H}^\rho} \lesssim N^{\rho-s}$, $1/4 \leq \rho, s < 1$, e v a única solução dada no Teorema 2.6. Então existe uma única solução w do PVI (2.16) e w está definida no mesmo intervalo de existência de v, $[0, \Delta T]$, $\Delta T \sim N^{-(1-s)}$ tal que*

$$w \in \mathcal{C}([0, \Delta T]; \mathbf{H}^\rho(\mathbb{R})).$$

Demonstração: A prova do teorema segue o mesmo argumento de [28]. Daremos os detalhes para $\rho = 1/4$, temos

$$\begin{aligned}
F(v+w) - F(v) = & 2i\gamma v Re(v\overline{w}) + 2i\gamma w Re(v\overline{w}) + i\gamma|w|^2 w + i\gamma|w|^2 v \\
& + i\gamma|v|^2 w + \delta|v|^2\partial_x w + 2\delta\partial_x v Re(v\overline{w}) + 2\delta\partial_x w Re(v\overline{w}) \\
& + \delta|w|^2\partial_x v + \delta|w|^2\partial_x w + 2\epsilon vw\overline{\partial_x v} + 2\epsilon vw\overline{\partial_x w} + \epsilon v^2\overline{\partial_x w} \\
& + \epsilon w^2\overline{\partial_x v} + \epsilon w^2\overline{\partial_x w} \\
:= & \gamma\sum_{j=1}^{5}\zeta_j^\gamma(w,v) + \delta\sum_{j=1}^{5}\zeta_j^\delta(w,v) + \epsilon\sum_{j=1}^{5}\zeta_j^\epsilon(w,v).
\end{aligned}$$

Definamos como antes

$$Z_{a,T} := \{w \in \mathcal{C}([-\Delta T, \Delta T]; \mathbf{H^{1/4}}(\mathbb{R})) / \, |||w|||_{1/4} \leq a\},$$

onde como em (2.42) definimos,

$$\begin{aligned}|||w|||_{1/4} =& \|w\|_{\mathbf{L^\infty_{\Delta T} H^{1/4}}} + \|D_x^{1/4}\partial_x w\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_{\Delta T}}} + \|\partial_x w\|_{\mathbf{L^{20}_x L^{5/2}_{\Delta T}}} + \|w\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_{\Delta T}}} \\ &+ \|D_x^{1/4} w\|_{\mathbf{L^5_x L^{10}_{\Delta T}}} + \|w\|_{\mathbf{L^5_x L^{10}_{\Delta T}}} + \|\partial_x w\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_{\Delta T}}} + \|u\|_{\mathbf{L^8_x L^8_T}} \\ &+ \|D_x^{1/4} u\|_{\mathbf{L^8_x L^8_T}}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Seja

$$G(w,v)(t) = F(v+w)(t) - F(v)(t). \tag{2.45}$$

Como na prova do Teorema 1.1 temos que mostrar que para $w \in Z_{a,\Delta T}$, a aplicação

$$\Phi(w(t)) = U(t)w_0 - \int_0^t U(t-t')G(w,v)(t')dt', \tag{2.46}$$

satisfaz $\Phi : Z_{a,\Delta T} \to Z_{a,\Delta T}$ além de ser uma contração. Como na demonstração do Teorema 1.1, temos

$$|||\Phi(w)|||_{1/4} \leq C\|w_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}} + C\Delta T^{1/2}(A_1 + A_2),$$

onde $A_1 := \Delta T^{1/2}\|D_x^{1/4} G(w,v)(t)\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}}$, $A_2 := \|G(w,v)(t)\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}}$. Estimemos A_1, da definição de $G(w,v)$ temos

$$\begin{aligned} A_1 \leq& \gamma \sum_j \|D_x^{1/4}\zeta_j^\gamma\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}} + \delta \sum_j \|D_x^{1/4}\zeta_j^\delta\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}} + \epsilon \sum_j \|D_x^{1/4}\zeta_j^\epsilon\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}} \\ :=& I(\gamma)(w,v) + I(\delta)(w,v) + I(\epsilon)(w,v), \end{aligned}$$

onde $\zeta_j^\gamma := \zeta_j^\gamma(w,v)$, $\zeta_j^\delta := \zeta_j^\delta(w,v)$, $\zeta_j^\epsilon := \zeta_j^\epsilon(w,v)$ representam respectivamente os termos em γ, δ e ϵ de $G(w,v)$.

Estimativa para $I(\gamma)(w,v)$:

Usando a regra de Leibniz para derivadas fracionárias, sua versão escalar obtemos

$$\begin{aligned} \|D_x^{1/4}(|v|^2\overline{w})\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}} &\lesssim \|D_x^{1/4}|v|^2\|_{\mathbf{L^4_x L^2_{\Delta T}}} \|w\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_{\Delta T}}} + \||v|^2 D_x^{1/4}\overline{w}\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}} \\ &\leq C\Delta T^{1/4}(|||w|||_{1/4}|||v|||_{1/4}^2 + \|v\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_{\Delta T}}}\|v\|_{\mathbf{L^8_x L^8_{\Delta T}}}\|D_x^{1/4}\overline{w}\|_{\mathbf{L^8_x L^8_{\Delta T}}}) \\ &\leq C\Delta T^{1/4}(|||w|||_{1/4}|||v|||_{1/4}^2 + |||v|||_{1/4}\,|||v|||_{1/4}\,|||w|||_{1/4}). \end{aligned}$$

Similarmente para os outros termos de γ, logo

$$I(\gamma)(w,v) \leq C\Delta T^{1/4}(|||w|||_{1/4}|||v|||_{1/4}^2 + |||w|||_{1/4}^3 + |||v|||_{1/4}|||w|||_{1/4}^2).$$

Pelo feito acima e da homogeneidade dos termos em γ é claro que basta estimar o primeiro termo, pois nos outros o procedimento é o mesmo, notando que na versão vetorial da regra da cadeia para derivadas fracionárias se $f(x) = |x|^2$, então $|f'(x)| \leq 2|x|$ e $|f'(v)| \leq 2|v|$. As estimativas para os termos em ϵ e δ seguem a mesma prova como no Teorema 3.2 de [13], assim obtemos que

$$I(\delta)(w,v) + I(\epsilon)(w,v) \leq C(|||w|||_{1/4}|||v|||_{1/4}^2 + |||w|||_{1/4}^3 + |||v|||_{1/4}|||w|||_{1/4}^2),$$

em conseqüência,

$$A_1 \leq C(1 + \Delta T^{1/4})(|||w|||_{1/4}|||v|||_{1/4}^2 + |||w|||_{1/4}^3 + |||v|||_{1/4}|||w|||_{1/4}^2),$$

onde C é uma constante que depende de γ, ϵ e δ, tem-se também que

$$\|v^2\overline{w}\|_{\mathbf{L_x^2 L_{\Delta T}^2}} \leq \|w\|_{\mathbf{L_x^4 L_{\Delta T}^\infty}} \|v^2\|_{\mathbf{L_x^4 L_{\Delta T}^2}} \leq C\Delta T^{1/4}|||w|||_{1/4}|||v|||_{1/4}^2. \tag{2.47}$$

De maneira similar para os outros termos, portanto

$$A_2 \leq C(1 + \Delta T^{1/4})(|||w|||_{1/4}|||v|||_{1/4}^2 + |||w|||_{1/4}^3 + |||v|||_{1/4}|||w|||_{1/4}^2).$$

Desta maneira

$$\begin{aligned}|||\Phi(w)|||_{1/4} \leq& \|w_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}} + C\Delta T^{1/2}(1 + \Delta T^{1/4})(|||v|||_{1/4}^2 + |||w|||_{1/4}^2 + \\ &+ |||v|||_{1/4}|||w|||_{1/4})|||w|||_{1/4}.\end{aligned}$$

Logo obtemos que $\Phi : Z_{a,\Delta T} \to Z_{a,\Delta T}$ está bem definida tomando

$$a = 2C \max\{\|w_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}}, \|v_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}}\}, \quad Ca^2\Delta T^{1/2} < \frac{1}{10}, \;\; Ca^2\Delta T^{3/4} < \frac{1}{10},$$

portanto podemos tomar

$$\Delta T \leq C \min\left\{\frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^{8/3}}\right\}. \tag{2.48}$$

Por ser $\|w_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}} \lesssim N^{\{1/4-s\}} \leq N^{(1-s)/4}$ e $\|v_0\|_{\mathbf{H^{1/4}}} \lesssim N^{(1-s)/4}$, tem-se que $a \lesssim N^{(1-s)/4}$ em conseqüência

$$\min\{1/a^4, 1/a^{8/3}\} \geq \min\{N^{-(1-s)}, N^{-2(1-s)/3}\} = N^{-(1-s)} \tag{2.49}$$

logo podemos escolher

$$\Delta T \sim N^{-(1-s)}.$$

Que $\Phi : Z_{a,\Delta T} \to Z_{a,\Delta T}$ é uma contração segue-se de um argumento análogo. $\square$

Corolário 2.1. *Consideramos w e v soluções dos PVI (2.14) e (2.16) com dados iniciais w_0, v_0 respectivamente. Sejam $1/4 \leq \rho \leq s < 1$, suponhamos que o dado inicial w_0 satisfaz $\|w_0\|_{\mathbf{H}^\rho} \lesssim N^{\rho-s}$, e v_0 satisfaz as condições (2.39) se*

$$\begin{aligned}\mathbb{I}w\mathbb{I}_\rho :=& \|w\|_{\mathbf{L}^\infty_{\Delta\mathbf{T}}\mathbf{H}^\rho} + \|D_x^\rho \partial_x w\|_{\mathbf{L}^\infty_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}} + \|\partial_x w\|_{\mathbf{L}^\infty_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}} + \|w\|_{\mathbf{L}^4_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^\infty_{\Delta\mathbf{T}}} \\ &+ \|D_x^\rho w\|_{\mathbf{L}^5_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^{10}_{\Delta\mathbf{T}}} + \|w\|_{\mathbf{L}^5_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^{10}_{\Delta\mathbf{T}}} + \|D_x^{\rho-1/4}\partial_x w\|_{\mathbf{L}^{20}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^{5/2}_{\Delta\mathbf{T}}} + \|w\|_{\mathbf{L}^8_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^8_{\mathbf{T}}} \\ &+ \|D_x^\rho w\|_{\mathbf{L}^8_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^8_{\mathbf{T}}}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Então

$$\mathbb{I}w\mathbb{I}_\rho \lesssim N^{\rho-s}. \tag{2.51}$$

Demonstração: Como na demonstração do Teorema 2.7, temos da fórmula integral para w

$$\begin{aligned}\mathbb{I}w\mathbb{I}_\rho \leq& C\|w_0\|_{\mathbf{H}^\rho} + C\Delta T^{1/2}\|D_x^\rho G(w,v)\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}} + C\Delta T^{1/2}\|G(w,v)\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}} \\ \leq& C\|w_0\|_{\mathbf{H}^\rho} + C\Delta T^{1/2}(B_1 + B_2).\end{aligned}$$

Estimamos B_1, da definição de $G(w,v)$ temos

$$\begin{aligned}B_1 \leq& \gamma\sum_j \|D_x^\rho \zeta_j^\gamma\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}} + \delta\sum_j \|D_x^\rho \zeta_j^\delta\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}} + \epsilon\sum_j \|D_x^\rho \zeta_j^\epsilon\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}} \\ :=& J(\gamma)(w,v) + J(\delta)(w,v) + J(\epsilon)(w,v).\end{aligned}$$

Da prova do Teorema 2.7 temos $|||w|||_{1/4} \leq C\|w_0\|_{\mathbf{H}^{1/4}}$ (Persistência), portanto $|||w|||_{1/4} \lesssim N^{1/4-s}$, de igual maneira $|||v|||_{1/4} \lesssim N^{1/4(1-s)}$. Estimamos $J(\gamma)$, usando a regra de Leibniz para derivadas fracionárias, sua versão escalar, temos

$$\begin{aligned}\|D_x^\rho(v^2\overline{w})\|_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}} \lesssim& \|w\|_{\mathbf{L}^4_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^\infty_{\Delta\mathbf{T}}}\|D_x^\rho|v|^2\|_{\mathbf{L}^4_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}} + \||v|^2 D_x^\rho\overline{w}\|_{\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}\mathbf{L}^2_{\mathbf{x}}} \\ \lesssim& \Delta T^{1/4}\|w\|_{\mathbf{L}^4_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^\infty_{\Delta\mathbf{T}}}\|v\|_{\mathbf{L}^8_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^8_{\Delta\mathbf{T}}}\|D_x^\rho v\|_{\mathbf{L}^8_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^8_{\Delta\mathbf{T}}} + \|v\|_{\mathbf{L}^4_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^\infty_{\Delta\mathbf{T}}}\|vD_x^\rho\overline{w}\|_{\mathbf{L}^4_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}} \\ \lesssim& \Delta T^{1/4}(|||w|||_{1/4}|||v|||_{1/4}|||v|||_\rho + |||v|||_{1/4}^2\mathbb{I}w\mathbb{I}_\rho).\end{aligned}$$

Pela homogeneidade dos termos que contém γ e usando na versão vetorial da regra da cadeia para derivadas fracionárias que se $f(x) = |x|^2$, então $|f'(x)| \leq 2|x|$, logo $|f'(v)| \leq 2|v|$ tem-se que

$$\begin{aligned}J(\gamma) \leq& C\Delta T^{1/4}(|||v|||_{1/4}^2\mathbb{I}w\mathbb{I}_\rho + |||w|||_{1/4}|||v|||_\rho|||v|||_{1/4} + |||w|||_{1/4}^2|||v|||_\rho \\ &+\mathbb{I}w\mathbb{I}_\rho|||w|||_{1/4}|||v|||_{1/4} + |||w|||_{1/4}^2\mathbb{I}w\mathbb{I}_\rho).\end{aligned}$$

O mesmo esquema para a equação mKdV no Corolário 3.3 de [13], serve para estimar o termo $J(\epsilon) := J(\epsilon)(w,v)$ e que $J(\delta) := J(\delta)(w,v)$ se estima igual, logo obtemos que

$$\begin{aligned}J(\delta) + J(\epsilon) \leq& C|||v|||_{1/4}^2\mathbb{I}w\mathbb{I}_\rho + |||w|||_{1/4}|||v|||_\rho|||v|||_{1/4} + |||w|||_{1/4}^2|||v|||_\rho \\ &+\mathbb{I}w\mathbb{I}_\rho|||w|||_{1/4}|||v|||_{1/4} + |||w|||_{1/4}^2\mathbb{I}w\mathbb{I}_\rho\end{aligned}$$

Portanto temos

$$\begin{aligned}B_1 \leq & C(1+\Delta T^{1/4})(|||v|||_{1/4}^2 \mathbb{I} w \mathbb{I}_\rho + |||w|||_{1/4}\, |||v|||_\rho\, |||v|||_{1/4} + |||w|||_{1/4}^2 |||v|||_\rho \\ & + \mathbb{I} w \mathbb{I}_\rho |||w|||_{1/4}\, |||v|||_{1/4} + |||w|||_{1/4}^2 \mathbb{I} w \mathbb{I}_\rho).\end{aligned}$$

logo, para $\Delta T \sim N^{-(1-s)}$, $s \geq 1/4$ por (2.41), (2.51) e (2.48) temos que

$$\Delta T^{1/2} B_1 \leq 1/5 \mathbb{I} w \mathbb{I}_\rho + C N^{\rho - s},$$

onde C é uma constante que depende de γ, ϵ e δ, temos também de (2.47) que

$$\|v^2 \overline{w}\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}} \leq C \Delta T^{1/4} |||w|||_{1/4} |||v|||_{1/4}^2,$$

logo

$$B_2 \leq C(1+\Delta T^{1/4})(|||w|||_{1/4}|||v|||_{1/4}^2 + |||w|||_{1/4}^3 + |||v|||_{1/4}|||w|||_{1/4}^2).$$

Assim para $\Delta T \sim N^{-(1-s)}$,

$$\Delta T^{1/2} B_2 \leq |||w|||_{1/4} \leq N^{\{1/4 - s\}} \leq N^{\{\rho - s\}},$$

pois por (2.48) sabemos que

$$C \Delta T^{1/2}(1+\Delta T^{1/4})(|||w|||_{1/4}^2 + |||w|||_{1/4}|||v|||_{1/4} + |||v|||_{1/4}^2) < 1/5.$$

Em conseqüência temos o resultado desejado. □

Proposição 2.1. *Sejam w e v as soluções dos PVI (2.16) e (2.14) com dados $w_0 \in \mathbf{H^s}$ e $v_0 \in \mathbf{H^1}$ tais que $\|w_0\|_{\mathbf{L^2}} \lesssim N^{-s}$ e $\|v_0\|_{\mathbf{H^1}} \lesssim N^{1-s}$, $1/4 \leq s < 1$ respectivamente. Então*

$$|||w|||_0 \lesssim N^{-s}, \tag{2.52}$$

onde

$$|||w|||_0 = \|w\|_{\mathbf{L^\infty_{\Delta T} L^2_x}} + \|\partial_x w\|_{\mathbf{L^\infty_x L^2_{\Delta T}}} + \|w\|_{\mathbf{L^8_x L^8_{\Delta T}}} + \|w\|_{\mathbf{L^5_x L^{10}_{\Delta T}}}.$$

Demonstração: Consideramos a fórmula integral para w

$$\Phi(w(t)) = U(t) w_0 - \int_0^t U(t-t') G(w,v)(t') dt'.$$

Usando as estimativas lineares da Seção 4.1, como nos resultados anteriores temos

$$|||w|||_0 \leq C \|w_0\|_{\mathbf{L^2}} + C \Delta T^{1/2} \|G(w,v)\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}}. \tag{2.53}$$

Da definição de $G(w,v)$ temos

$$\begin{aligned}\|G(w,v)\|_{\mathbf{L^2_xL^2_{\Delta T}}} \leq& \gamma\sum_j \|\zeta_j^\gamma\|_{\mathbf{L^2_xL^2_{\Delta T}}} + \delta\sum_j \|\zeta_j^\delta\|_{\mathbf{L^2_xL^2_{\Delta T}}} + \epsilon\sum_j \|\zeta_j^\epsilon\|_{\mathbf{L^2_xL^2_{\Delta T}}}\\ :=& L(\gamma)(w,v) + L(\delta)(w,v) + L(\epsilon)(w,v),\end{aligned}$$

como acima ζ_j^γ, ζ_j^δ, ζ_j^ϵ representam os termos em γ, δ e ϵ respectivamente. Os termos que contém ϵ e δ, estimam-se igual que em [13], temos de (2.47) que

$$\|v^2\overline{w}\|_{\mathbf{L^2_xL^2_{\Delta T}}} \leq C\Delta T^{1/4}|||w|||_0|||v|||_{1/4}^2,$$

de (2.47) também temos

$$\||w|^2w\|_{\mathbf{L^2_xL^2_{\Delta T}}} \leq C\Delta T^{1/4}|||w|||_0|||w|||_{1/4}^2. \tag{2.54}$$

Agora para o termo que contém $|w|^2\overline{v}$, temos

$$\||w|^2\overline{v}\|_{\mathbf{L^2_xL^2_{\Delta T}}} \leq \|v\|_{\mathbf{L^4_xL^\infty_{\Delta T}}}\|w^2\|_{\mathbf{L^4_xL^2_{\Delta T}}} \leq C\Delta T^{1/4}|||v|||_{1/4}|||w|||_{1/4}|||w|||_0. \tag{2.55}$$

Segue-se de (2.48) que

$$\Delta T^{3/4}L(\gamma)(w,v) \leq \frac{C}{10}|||w|||_0,$$

e por o mesmo argumento da Proposição 3.4 de [13] para os termos

$$\Delta T^{1/2}(L(\delta)(w,v) + L(\epsilon)(w,v)) \leq \frac{2C}{10}|||w|||_0.$$

Portanto de (2.53) temos

$$|||w|||_0 \leq C\|w_0\|_{\mathbf{L^2}} + \frac{3C}{10}|||w|||_0.$$

Portanto

$$|||w|||_0 \leq C\|w_0\|_{\mathbf{L^2}}.$$

Em conseqüência obtemos o resultado. $\square$

Observação 2.1. *Observar que na definição de $|||\cdot|||_\rho$ em (2.44) e (2.50) ela somente é valida para $1/4 \leq \rho \leq 1$.*

Lema 2.3. *Se v é uma solução do PVI (2.14) em $[0, \Delta T]$, então para $\theta \in [1/4, 1]$,*

$$\|\partial_x v\|_{\mathbf{L_x^{2/\theta} L_T^2}} \leq C \Delta T^{\theta/2} \,|||v|||_\theta. \tag{2.56}$$

$$\|\partial_x v\|_{\mathbf{L_x^{40/(20\theta-3)} L_T^{5/2}}} \leq C \Delta T^{\theta/2 - 1/8} \,|||v|||_\theta. \tag{2.57}$$

Se $\Delta T < 1$,

$$\|v\|_{\mathbf{L_x^{4/(1+\theta)} L_T^\infty}} \leq C \,|||v|||_{1/4+\theta/2}. \tag{2.58}$$

$$\|v\|_{\mathbf{L_x^2 L_{\Delta T}^\infty}} \leq C \,|||v|||_{3/4}. \tag{2.59}$$

Além disso tem-se que a solução w do PVI (2.16) satisfaz,

$$\|\partial_x w\|_{\mathbf{L_x^{2/\theta} L_T^2}} \leq C \Delta T^{\theta/2} \,\mathbb{I} w \mathbb{I}_\theta. \tag{2.60}$$

$$\|\partial_x w\|_{\mathbf{L_x^{40/(20\theta-3)} L_T^{5/2}}} \leq C \Delta T^{\theta/2 - 1/8} \,\mathbb{I} w \mathbb{I}_\theta. \tag{2.61}$$

Se $\Delta T < 1$,

$$\|w\|_{\mathbf{L_x^{4/(1+\theta)} L_T^\infty}} \leq C \,\mathbb{I} w \mathbb{I}_{1/4+\theta/2}. \tag{2.62}$$

Demonstração: Para provar (2.56) usamos (2.20) e a fórmula integral para v, assim como na prova do Teorema 1.1 considerando $a = 2C\|v_0\|_{\mathbf{H}^\theta}$ e ΔT tal que $\Delta T^{1/2}(1 + \Delta T^{1/4})a^2 \leq 1/2$ para $|||v|||_\theta \leq a$ assim obtemos que

$$\begin{aligned} \|\partial_x v\|_{\mathbf{L_x^{2/\theta} L_{\Delta T}^2}} &\leq C \Delta T^{\theta/2} \|v_0\|_{\mathbf{H}^\theta} + C \Delta T^{\theta/2} \Delta T^{1/2} (1 + \Delta T^{1/4}) |||v|||_\theta^3 \\ &\leq C \Delta T^{\theta/2} \|v\|_{\mathbf{L_{\Delta T}^\infty H^\theta}} + \Delta T^{\theta/2} |||v|||_\theta. \end{aligned}$$

As outras desigualdades obtem-se analogamente usando as desigualdades (2.37), (2.26) e (2.24) do Teorema 2.2 e o Teorema 2.4 respectivamente. □

A seguinte proposição é a mais importante na prova do Teorema 2.2. Faremos aqui uma prova mais geral que da apresentada em [13] (Proposição 3.6).

Proposição 2.2. *Definamos*

$$z(t) = -\int_0^t U(t - t') G(w, v)(t') dt',$$

onde $G(w, v)$ definido como em (2.45), com v e w soluções dos PVI (2.14) e (2.16) respectivamente, com condições iniciais v_0 e w_0 que satisfazem as hipóteses do Corolário 2.1 e Proposição 2.1. Para $s \in [1/4, 1]$, $\theta \in [1/2, 1]$ temos

$$\|z\|_{\mathbf{L_{\Delta T}^\infty H^\theta}} \lesssim N^{\left\{\frac{3\theta}{2} - (1 + \frac{3\theta}{2})s\right\}}, \tag{2.63}$$

$$\|z\|_{\mathbf{L_{\Delta T}^\infty L_x^2}} \lesssim N^{-s}. \tag{2.64}$$

Demonstração: Nesta demonstração consideramos $\Delta T \sim N^{-(1-s)}$, $1/4 \leq s \leq 1$. Estimaremos primeiro $\|\partial_x^\theta z\|_{\mathbf{L^2_x}}$ para $1/2 \leq \theta \leq 1$, da definição de z, de $G(w,v)$ e de (2.21) temos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^\theta z\|_{\mathbf{L^2_x}} \leq &\gamma \sum_{j=1}^{5} \|\partial_x^\theta \int_0^t U(t-t')\zeta_j^\gamma\|_{\mathbf{L^2_x}} + \delta \sum_{j=1}^{5} \|\partial_x^\theta \int_0^t U(t-t')\zeta_j^\delta\|_{\mathbf{L^2_x}} \\
&+ \epsilon \sum_{j=1}^{5} \|\partial_x^\theta \int_0^t U(t-t')\zeta_j^\epsilon\|_{\mathbf{L^2_x}} \\
\leq &C\Delta T^{(1-\theta)/2} \sum_{j=1}^{5} \|\zeta_j^\gamma\|_{\mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_{\Delta T}}} + C\Delta T^{(1-\theta)/2} \sum_{j=1}^{5} \|\zeta_j^\delta\|_{\mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_{\Delta T}}} \\
&+ C\Delta T^{(1-\theta)/2} \sum_{j=1}^{5} \|\zeta_j^\epsilon\|_{\mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_{\Delta T}}} \\
= &\Gamma_\theta(\gamma) + \Gamma_\theta(\delta) + \Gamma_\theta(\epsilon).
\end{aligned}$$

Para $j = 1, \ldots 5$, sejam $z_{j,\theta}^\gamma = C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|\zeta_j^\gamma\|_{\mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_{\Delta T}}}$
$z_{j,\theta}^\delta = C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|\zeta_j^\delta\|_{\mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_{\Delta T}}}$, $z_{j,\theta}^\epsilon = C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|\zeta_j^\epsilon\|_{\mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_{\Delta T}}}$.

Estimaremos somente os termos em ϵ e γ, pois os termos em δ se estiman igual que os termos em ϵ. Estimaremos primeiro os termos que contém γ:

Estimativa para $\Gamma_\theta(\gamma)$

Consideraremos dois casos

i) Se $1/2 \leq \theta \leq 3/4$:

Para $z_{1,\theta}^\gamma \leq C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|v^2 w\|_{\mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_{\Delta T}}}$, temos pelo Lema 2.3, Proposição 2.1, Corolário 2.1 e a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
z_{1,\theta}^\gamma \leq &C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|v\|_{\mathbf{L_x^{8/3}L^\infty_{\Delta T}}} \|v\|_{\mathbf{L_x^{2/\theta}L^\infty_{\Delta T}}} \|w\|_{\mathbf{L^8_x L^2_{\Delta T}}} \\
\leq &C\Delta T^{\{7/8-\theta/2\}}\|v\|_{\mathbf{L_x^{8/3}L^\infty_{\Delta T}}} \|v\|_{\mathbf{L_x^{2/\theta}L^\infty_{\Delta T}}} \|w\|_{\mathbf{L^8_x L^8_{\Delta T}}} \\
\leq &C\Delta T^{\{7/8-\theta/2\}}|||v|||_{1/2}|||v|||_{-1/4+\theta}|||w|||_0 \\
\leq &CN^{\{-5/8+3\theta/2-(3/8+3\theta/2)s\}} \\
\leq &CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}.
\end{aligned}$$

Igualmente para $z_{2,\theta}^\gamma \leq C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|\,|w|^2 v\|_{\mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_{\Delta T}}}$,

$$z_{2,\theta}^\gamma \leq C\Delta T^{\{7/8-\theta/2\}}\|w\|_{\mathbf{L_x^{8/3}L^\infty_{\Delta T}}} \|w\|_{\mathbf{L_x^{2/\theta}L^\infty_{\Delta T}}} \|v\|_{\mathbf{L^8_x L^8_{\Delta T}}}$$

$$
\begin{aligned}
&\le C\Delta T^{\{7/8-\theta/2\}}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{1/2}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{-1/4+\theta}|||v|||_0\\
&\le CN^{\{-5/8+3\theta/2-(9/8+\theta/2)s\}}\\
&\le CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}.
\end{aligned}
$$

Consideremos $z^{\gamma}_{3,\theta} \le C\||w|^2w\|_{\mathbf{L}^{2/(1+\theta)}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}}$,

$$
\begin{aligned}
z^{\gamma}_{3,\theta} &\le C\Delta T^{\{7/8-\theta/2\}}\|w\|_{\mathbf{L}^{8/3}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|w\|_{\mathbf{L}^{2/\theta}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|w\|_{\mathbf{L}^{8}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^{8}_{\Delta\mathbf{T}}}\\
&\le C\Delta T^{\{7/8-\theta/2\}}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{1/2}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{-1/4+\theta}|||w|||_0\\
&\le CN^{\{-5/8+3\theta/2-(17/8+\theta/2)s\}}\\
&\le CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}.
\end{aligned}
$$

ii) Se $3/4 \le \theta \le 1$:

Para $z^{\gamma}_{1,\theta} \le C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|v^2w\|_{\mathbf{L}^{2/(1+\theta)}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}}$, a mesma estimativa do caso anterior serve.
Para $z^{\gamma}_{2,\theta} \le C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|\,|w|^2v\|_{\mathbf{L}^{2/(1+\theta)}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}}$,

$$
\begin{aligned}
z^{\gamma}_{2,\theta} &\le C\Delta T^{\{(1-\theta)/2\}}\|w\|_{\mathbf{L}^{8/3}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|w\|_{\mathbf{L}^{8/(4\theta-1)}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|v\|_{\mathbf{L}^{4}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^{2}_{\Delta\mathbf{T}}}\\
&\le C\Delta T^{\{1-\theta/2\}}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{1/2}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{-1/2+\theta}|||v|||_{1/4}\\
&\le CN^{\{-3/4+3\theta/2-(5/4+\theta/2)s\}}\\
&\le CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}.
\end{aligned}
$$

Igualmente para $z^{\gamma}_{3,\theta} \le C\||w|^2w\|_{\mathbf{L}^{2/(1+\theta)}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^2_{\Delta\mathbf{T}}}$,

$$
\begin{aligned}
z^{\gamma}_{3,\theta} &\le C\Delta T^{\{1-\theta/2\}}\|w\|_{\mathbf{L}^{8/3}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|w\|_{\mathbf{L}^{8/(4\theta-1)}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|w\|_{\mathbf{L}^{4}_{\mathbf{x}}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\\
&\le C\Delta T^{\{1-\theta/2\}}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{1/2}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{-1/2+\theta}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{1/4}\\
&\le CN^{\{-3/4+3\theta/2-(2+\theta/2)s\}}\\
&\le CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}.
\end{aligned}
$$

Observar que para $z^{\gamma}_{3,\theta}$, quando $3/4 \le \theta \le 1$, temos também que

$$
z^{\gamma}_{3,\theta} \le CT^{1/2}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{-1/2+\theta}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{-1/2+\theta}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{5/4-\theta} \le CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}
$$

.

Portanto $\Gamma_\theta(\gamma) \le CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}$.

<u>**Estimativa para $\Gamma_\theta(\epsilon)$**</u>

Dividimos a prova em duas etapas,

i) Se $1/2 \leq \theta \leq 3/4$:

Para $z^{\epsilon}_{2,\theta} \leq C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|vw\partial_x w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{2}/(\mathbf{1}+\theta)}\mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\Delta\mathbf{T}}}$, temos

$$\begin{aligned}
z^{\epsilon}_{2,\theta} \leq & C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|v\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{8}/\mathbf{3}}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{8}/(\mathbf{1}+\mathbf{4}\theta)}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|\partial_x w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\infty}\mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\Delta\mathbf{T}}} \\
\leq & C\Delta T^{\{1/2-\theta/2\}}|||v|||_{1/2}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{\theta}|||w|||_0 \\
\leq & CN^{\{3\theta/2-(2+\theta/2)s\}} \\
\leq & CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}.
\end{aligned}$$

Para $z^{\epsilon}_{3,\theta} \leq C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|v^2\partial_x w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{2}/(\mathbf{1}+\theta)}\mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\Delta\mathbf{T}}}$, temos

$$\begin{aligned}
z^{\epsilon}_{3,\theta} \leq & C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|v\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{8}/\mathbf{3}}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|v\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{8}/(\mathbf{1}+\mathbf{4}\theta)}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|\partial_x w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\infty}\mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\Delta\mathbf{T}}} \\
\leq & C\Delta T^{\{1/2-\theta/2\}}|||v|||_{1/2}|||v|||_{\theta}|||w|||_0 \\
\leq & CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}.
\end{aligned}$$

Para $z^{\epsilon}_{4,\theta} \leq C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|w^2\partial_x v\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{2}/(\mathbf{1}+\theta)}\mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\Delta\mathbf{T}}}$, temos

$$\begin{aligned}
z^{\epsilon}_{4,\theta} \leq & C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{8}/\mathbf{3}}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{8}/(\mathbf{1}+\mathbf{4}\theta)}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|\partial_x v\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\infty}\mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\Delta\mathbf{T}}} \\
\leq & C\Delta T^{\{1/2-\theta/2\}}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{1/2}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{\theta}|||v|||_0 \\
\leq & CN^{\{3\theta/2-(3/2+\theta/2)s\}} \\
\leq & CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}.
\end{aligned}$$

E para $z^{\epsilon}_{5,\theta} \leq C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|w^2\partial_x w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{2}/(\mathbf{1}+\theta)}\mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\Delta\mathbf{T}}}$, temos

$$\begin{aligned}
z^{\epsilon}_{5,\theta} \leq & C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{8}/\mathbf{3}}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{8}/(\mathbf{1}+\mathbf{4}\theta)}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|\partial_x w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\infty}\mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\Delta\mathbf{T}}} \\
\leq & C\Delta T^{\{1/2-\theta/2\}}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{1/2}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{\theta}|||w|||_0 \\
\leq & CN^{\{3\theta/2-(5/2+\theta/2)s\}} \\
\leq & CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}.
\end{aligned}$$

ii) Se $3/4 < \theta \leq 1$:

Para $z^{\epsilon}_{2,\theta} \leq C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|vw\partial_x w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{2}/(\mathbf{1}+\theta)}\mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\Delta\mathbf{T}}}$, temos

$$\begin{aligned}
z^{\epsilon}_{2,\theta} \leq & C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|v\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{8}/\mathbf{3}}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{8}/(\mathbf{4}\theta-\mathbf{1})}\mathbf{L}^{\infty}_{\Delta\mathbf{T}}}\|\partial_x w\|_{\mathbf{L}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{4}}\mathbf{L}^{\mathbf{2}}_{\Delta\mathbf{T}}} \\
\leq & C\Delta T^{\{(3/4-\theta/2)\}}|||v|||_{1/2}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{-1/2+\theta}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{1/2} \\
\leq & CN^{\{3\theta/2-1/4-(7/4+\theta/2)s\}} \\
\leq & CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}.
\end{aligned}$$

Igualmente para $z^{\epsilon}_{3,\theta} \leq C\Delta T^{(1-\theta)/2} \|v^2 \partial_x w\|_{\mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_{\Delta T}}}$, temos

$$\begin{aligned} z^{\epsilon}_{3,\theta} \leq & C\Delta T^{(1-\theta)/2} \|v\|_{\mathbf{L_x^2 L^\infty_{\Delta T}}} \|v\|_{\mathbf{L_x^{2/\theta} L^\infty_{\Delta T}}} \|\partial_x w\|_{\mathbf{L_x^\infty L^2_{\Delta T}}} \\ \leq & C\Delta T^{\{1/2-\theta/2\}} |||v|||_{3/4} |||v|||_{-1/4+\theta} |||w|||_0 \\ \leq & CN^{\{1/4+\theta/2-(5/4+\theta/2)s\}} \\ \leq & CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}. \end{aligned}$$

Para $z^{\epsilon}_{4,\theta} \leq C\Delta T^{(1-\theta)/2} \|w^2 \partial_x v\|_{\mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_{\Delta T}}}$, temos

$$\begin{aligned} z^{\epsilon}_{4,\theta} \leq & C\Delta T^{(1-\theta)/2} \|w\|_{\mathbf{L_x^{8/3} L^\infty_{\Delta T}}} \|w\|_{\mathbf{L_x^{8/(4\theta-1)} L^\infty_{\Delta T}}} \|\partial_x v\|_{\mathbf{L_x^4 L^2_{\Delta T}}} \\ \leq & C\Delta T^{\{(3/4-\theta/2)\}} \mathbb{I} w \mathbb{I}_{1/2} \mathbb{I} w \mathbb{I}_{-1/2+\theta} |||v|||_{1/2} \\ \leq & CN^{\{3\theta/2-1/4-(7/4+\theta/2)s\}} \\ \leq & CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}. \end{aligned}$$

E para $z^{\epsilon}_{5,\theta} \leq C\Delta T^{(1-\theta)/2} \|w^2 \partial_x w\|_{\mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_{\Delta T}}}$, temos

$$\begin{aligned} z^{\epsilon}_{5,\theta} \leq & C\Delta T^{(1-\theta)/2} \|w\|_{\mathbf{L_x^{2/\theta} L^\infty_{\Delta T}}} \|w\|_{\mathbf{L_x^{8/3} L^\infty_{\Delta T}}} \|\partial_x w\|_{\mathbf{L_x^8 L^2_{\Delta T}}} \\ \leq & C\Delta T^{\{(1-\theta)/2\}} \mathbb{I} w \mathbb{I}_{-1/4+\theta} \mathbb{I} w \mathbb{I}_{1/2} |||w|||_{1/4} \\ \leq & CN^{\{3\theta/2-(5/2+\theta/2)s\}} \\ \leq & CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}. \end{aligned}$$

Também podemos limitar $z^{\epsilon}_{5,\theta}$ assim,

$$\begin{aligned} z^{\epsilon}_{5,\theta} \leq & C\Delta T^{(1-\theta)/2} \|w\|_{\mathbf{L_x^{8/3} L^\infty_{\Delta T}}} \|w\|_{\mathbf{L_x^{8/(4\theta-1)} L^\infty_{\Delta T}}} \|\partial_x w\|_{\mathbf{L_x^4 L^2_{\Delta T}}} \\ \leq & C\Delta T^{\{(3/4-\theta/2)\}} \mathbb{I} w \mathbb{I}_{1/2} \mathbb{I} w \mathbb{I}_{-1/2+\theta} \mathbb{I} w \mathbb{I}_{1/2} \\ \leq & CN^{\{3\theta/2-1/4-(9/4+\theta/2)s\}} \\ \leq & CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}. \end{aligned}$$

Por último, para o termo $z^{\epsilon}_{1,\theta} \leq C\Delta T^{(1-\theta)/2} \|vw\partial_x v\|_{\mathbf{L_x^{2/(1+\theta)}L^2_{\Delta T}}}$, $1/2 \leq \theta \leq 1$, temos pelo Lema 2.3, Proposição 2.1, Corolário 2.1 e a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} z^{\epsilon}_{1,\theta} \leq & C\Delta T^{1/2-\theta/2} T^{\theta/2-1/8} \|v\|_{\mathbf{L_x^{8/3} L^\infty_{\Delta T}}} \|w\|_{\mathbf{L_x^5 L^{10}_{\Delta T}}} \|\partial_x v\|_{\mathbf{L_x^{40/(20\theta-3)} L^{5/2}_{\Delta T}}} \\ \leq & C\Delta T^{\{3/8\}} |||v|||_{1/2} |||w|||_0 |||v|||_\theta \\ \leq & CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}. \end{aligned}$$

Portanto $\Gamma_\theta(\epsilon) \leq CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}$.

Estimamos agora $\|z\|_{\mathbf{L^2_x}}$, usando a desigualdade de Minkowski e por ser $U(t)$ unitário em $\mathbf{L^2_x}$ temos,

$$\begin{aligned}
\|z\|_{\mathbf{L^2_x}} \leq& \int_0^t \|G(w,v)(t')\|_{\mathbf{L^2_x}} dt' \\
\leq& \gamma \Delta T^{1/2} \sum_j \|\zeta_j^\gamma\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}} + \delta \Delta T^{1/2} \sum_j \|\zeta_j^\delta\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}} + \epsilon \Delta T^{1/2} \sum_j \|\zeta_j^\epsilon\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}} \\
=& \Gamma'(\gamma) + \Gamma'(\delta) + \Gamma'(\epsilon).
\end{aligned}$$

Como acima começamos com os termos que contém γ, temos para $\Delta T \sim N^{-(1-s)}$

$$\begin{aligned}
\Delta T^{1/2} \|v^2 \overline{w}\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}} \leq& \Delta T^{\{\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\}} |||w|||_0 |||v|||_{1/4}^2 \\
\lesssim& N^{\{-\frac{4}{5}(1-s)-s+\frac{1}{2}(1-s)\}} \\
=& N^{\{-\frac{3}{10}-\frac{7}{10}s\}} \\
\leq& N^{-s}.
\end{aligned}$$

Igualmente

$$\begin{aligned}
\Delta T^{1/2} \||w|^2 w\|_{\mathbf{L^2_x L^2_{\Delta T}}} \leq& \Delta T^{\{\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\}} |||w|||_0 |||w|||_{1/4}^2 \\
\lesssim& N^{\{-\frac{4}{5}(1-s)-s+2(\frac{1}{4}-s)\}} \\
\leq& N^{\{-\frac{3}{10}-\frac{11}{10}s\}} \\
\leq& N^{-s}.
\end{aligned}$$

Para o termo que contém $|w|^2\overline{v}$ procedemos como em (2.55), em conseqüência temos que $\Gamma'(\gamma) \lesssim N^{-s}$.

Para $\Gamma'(\delta)$, $\Gamma'(\epsilon)$ como na Proposição 3.6 de [13] temos que.

$$\Gamma'(\delta) + \Gamma'(\epsilon) \lesssim N^{-s}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\|z\|_{\mathbf{L^\infty_{\Delta T} L^2_x}} \lesssim& N^{-s} \\
\leq& N^{\{\frac{3\theta}{2} - (1+\frac{3\theta}{2})s\}}.
\end{aligned}$$

Assim a proposição fica demonstrada. □

Observação 2.2. *i) Observamos que para* $\mathbf{1/4} \leq \theta \leq \mathbf{1/2}$ *também obtemos (2.63) para os termos em* γ*, com efeito,*

Se $\mathbf{1/4} \leq \theta \leq \mathbf{1/2}$***:***

Para $z^{\gamma}_{1,\theta}$ *temos pelo Lema 2.3, Proposição 2.1, Corolário 2.1 e a desigualdade de Hölder,*

$$
\begin{aligned}
z^{\gamma}_{1,\theta} \leq & C\Delta T^{(1-\theta)/2}\|v\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_{\Delta T}}}\|v\|_{\mathbf{L_x^{8/(1+4\theta)} L^\infty_{\Delta T}}}\|w\|_{\mathbf{L^8_x L^2_{\Delta T}}} \\
\leq & C\Delta T^{\{7/8-\theta/2\}}\|v\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_{\Delta T}}}\|v\|_{\mathbf{L_x^{8/(1+4\theta)} L^\infty_{\Delta T}}}\|w\|_{\mathbf{L^8_x L^8_{\Delta T}}} \\
\leq & C\Delta T^{\{7/8-\theta/2\}}|||v|||_{1/4}|||v|||_{\theta}|||w|||_{0} \\
\leq & CN^{\{-5/8+3\theta/2-(3/8+3\theta/2)s\}} \\
\leq & CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}.
\end{aligned}
$$

Igualmente para $z^{\gamma}_{2,\theta}$*, temos*

$$
\begin{aligned}
z^{\gamma}_{2,\theta} \leq & C\Delta T^{\{7/8-\theta/2\}}\|w\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_{\Delta T}}}\|w\|_{\mathbf{L_x^{8/(1+4\theta)} L^\infty_{\Delta T}}}\|v\|_{\mathbf{L^8_x L^8_{\Delta T}}} \\
\leq & C\Delta T^{\{7/8-\theta/2\}}|||w|||_{1/4}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{\theta}|||v|||_{0} \\
\leq & CN^{\{-5/8+3\theta/2-(9/8+\theta/2)s\}} \\
\leq & CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}.
\end{aligned}
$$

E para $z^{\gamma}_{3,\theta}$*, temos*

$$
\begin{aligned}
z^{\gamma}_{3,\theta} \leq & C\Delta T^{\{7/8-\theta/2\}}\|w\|_{\mathbf{L^4_x L^\infty_{\Delta T}}}\|w\|_{\mathbf{L_x^{8/(1+4\theta)} L^\infty_{\Delta T}}}\|w\|_{\mathbf{L^8_x L^8_{\Delta T}}} \\
\leq & C\Delta T^{\{7/8-\theta/2\}}|||w|||_{1/4}\mathbb{I}w\mathbb{I}_{\theta}|||w|||_{0} \\
\leq & CN^{\{-5/8+3\theta/2-(17/8+\theta/2)s\}} \\
\leq & CN^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}}.
\end{aligned}
$$

Os outros termos de $\Gamma_{\theta}(\gamma)$ *estimam-se analogamente.*

ii) Da parte i) desta observação, podemos ver que os termos em γ *são melhor comportados que os termos em* δ *e* ϵ*, pois pudemos derivar eles até* $\theta = 1/4$ *e os termos em* δ *e* ϵ *só até* $\theta = 1/2$*. Como veremos na prova do Teorema 2.2 a seguir, o valor* $\theta = 1/2$ *vai permitir provar que o PVI (2.1) é globalmente bem posto em* $\mathbf{H^s}$*,* $s \geq 5/9$*.*

2.3 Prova do Teorema 2.2

Consideramos $\theta \in [1/2, 1]$, $s \in [1/4, 1]$. Na primeira iteração sejam $u^0(t) := u(t)$, $v^0(t) := v(t)$ e $z^0(t) := z(t)$, no tempo $\Delta T = T_0$ consideramos as novas condições iniciais $v_1 := v^0(T_0) + z^0(T_0)$ e $w_1 := U(T_0)w_0$. Garantimos o mesmo tempo de existência local T_0 na segunda iteração, se $\|v_1\|_{\mathbf{H}^\theta}$, $\|w_1\|_{\mathbf{H}^\theta}$ crescem como $\|v_0\|_{\mathbf{H}^\theta}$, $\|w_0\|_{\mathbf{H}^\theta}$ respectivamente e $\|v_1\|_{\mathbf{L^2}}$, $\|w_1\|_{\mathbf{L^2}}$ como $\|v_0\|_{\mathbf{L^2}}$, $\|w_0\|_{\mathbf{L^2}}$. Vejamos isto em detalhe, na segunda e j-ésima iteração :

Na segunda iteração temos que a solução $u^1(t)$ de (2.1) com $u_1 = v_1 + w_1$ como dado inicial, para $t \in [T_0, 2T_0]$ vem expresada como $u^1(t) := v^1(t) + z^1(t) + U(t)w_1$, onde

$$z^1(t) = -\int_{T_0}^{t} U(t-\tau)G(w,v)(\tau)d\tau \quad t \in [T_0, 2T_0],$$

no tempo $2T_0$ consideramos os dados iniciais $v_2 := v^1(2T_0) + z^1(2T_0)$ e $w_2 := U(2T_0)w_1$ temos que $U(t)$ é um grupo unitário em $\mathbf{H}^\theta$, $\theta \in [1/2, 1]$, logo w_2 tem a mesma estimativa que w_1 e w_0. Por outro lado v_2 se escreve como:

$$v_2 = U(2T_0)v^0(T_0) - \int_{T_0}^{2T_0} U(2T_0 - t')F(t')dt' + U(2T_0)z^0(T_0) + z^1(2T_0),$$

pelo Teorema 2.1 e pela Proposição 2.2, temos

$$\begin{aligned}\|v_2\|_{\mathbf{H}^\theta} \leq& C\|v_0\|_{\mathbf{H}^\theta} + \|z^0(T_0)\|_{\mathbf{H}^\theta} + \|z^1(2T_0)\|_{\mathbf{H}^\theta}\\ \leq& C\|v_0\|_{\mathbf{H}^\theta} + C\,N^{\{\frac{3\theta}{2} - (1+\frac{3\theta}{2})s\}}\\ \leq& CN^{\theta(1-s)},\end{aligned}$$

e por (2.12) e a Proposição 2.2

$$\begin{aligned}\|v_2\|_{\mathbf{L^2}} \leq& \|v_0\|_{\mathbf{L^2}} + \|z^0(T_0)\|_{\mathbf{L^2}} + \|z^1(2T_0)\|_{\mathbf{L^2}}\\ \leq& \|u_0\|_{\mathbf{L^2}} + CN^{-s}\\ \leq& C.\end{aligned}$$

Na j-ésima iteração temos que:

$$\begin{aligned}\|v_j\|_{\mathbf{H}^\theta} \lesssim& \|v_0\|_{\mathbf{H}^\theta} + \sum_{k=0}^{j-1} \|z^k((k+1)T_0)\|_{\mathbf{H}^\theta}.\\ \|v_j\|_{\mathbf{L^2}} \leq& \|v_0\|_{\mathbf{L^2}} + \sum_{k=0}^{j-1} \|z^k((k+1)T_0)\|_{\mathbf{L^2}},\end{aligned}$$

onde

$$z^k(t) = -\int_{kT_0}^{t} U(t-\tau)G(w,v)(\tau)d\tau \quad t \in [kT_0, (k+1)T_0].$$

Portanto precisamos que

$$\sum_{k=0}^{j-1} \|z^k((k+1)T_0)\|_{\mathbf{H}^\theta} \leq C\, N^{\theta(1-s)}, \tag{2.65}$$

$$\sum_{k=0}^{j-1} \|z^k((k+1)T_0)\|_{\mathbf{L^2}} \leq C. \tag{2.66}$$

Como $j \lesssim T/T_0$ e usando a Proposição 2.2, precisamos que:

$$\frac{T}{T_0} N^{\{3\theta/2-(1+3\theta/2)s\}} \lesssim N^{\theta(1-s)}, \tag{2.67}$$

e

$$\frac{T}{T_0} N^{-s} \leq C. \tag{2.68}$$

Para $T_0 \sim N^{-(1-s)}$ obtemos (2.67) se

$$T \sim N^{\{(2+\theta/2)s-1-\theta/2\}}, \tag{2.69}$$

onde

$$(2+\theta/2)s - 1 - \theta/2 > 0.$$

Portanto $s > (2+\theta)/(4+\theta)$, então vemos que temos que escolher $N(T) \sim T^{1/((2+\theta/2)s-1-\theta/2)}$.

Usando (2.69) obtemos (2.68), com efeito

$$TN^{\{1-s\}}N^{-s} \leq N^{\{(2+\theta/2)s-1-\theta/2\}}N^{\{1-s\}}N^{-s} \leq N^{-\theta(1-s)/2} \lesssim 1,$$

para $(2+\theta)/(4+\theta) < s < 1$. Como $f(\theta) = (2+\theta)/(4+\theta)$ é uma função crescente em θ temos que $f(1/2) = 5/9$ é o melhor possível para obter uma solução global para HK. Observamos que $f(1) = 3/5$ é o valor obtido em [13], e $f(1/2) = 5/9$ é o valor obtido em [14] para globalmente bem posto da modificada KdV.

Agora provemos (2.9). Usando a decomposição (2.11) ($w_0 = u_0 - v_0$) como em (2.15), temos para $t \in [0, T]$

$$u(t) = U(t)u_0 + g(t), \tag{2.70}$$

onde $g(t) := v(t) + z(t) - U(t)v_0$, de (2.65), temos

$$\begin{aligned}
\|z(t)\|_{\mathbf{H}^\theta} &= \left\| \int_0^t U(t-t')G(w,v)(t')dt' \right\|_{\mathbf{H}^\theta} \\
&\leq \sum_{k=0}^{j_0-1} \|z^k((k+1)T_0)\|_{\mathbf{H}^\theta} + \|z^{j_0}(t)\|_{\mathbf{H}^\theta} \\
&\leq C\, N^{\theta(1-s)},
\end{aligned}$$

onde $j_0 \lesssim T/T_0$. Por (2.40), também obtemos

$$\sup_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{\mathbf{H}^\theta} \lesssim N^{\theta(1-s)}.$$

Em conseqüência, usando (2.12) e (2.69) obtemos para $\theta \in (1/2, 1]$

$$\|g\|_{\mathbf{H}^\theta} \lesssim N^{\theta(1-s)} = T^{2\theta(1-s)/\{(4+\theta)s-(2+\theta)\}},$$

Isto encerra a prova do teorema. $\square$

Da equação (2.70), temos a seguinte estimativa para $u(t)$

$$\sup_{[0,T]} \|u(t)\|_{\mathbf{H}^s} \lesssim \|u_0\|_{\mathbf{H}^s} + N^{s(1-s)} \leq \|u_0\|_{\mathbf{H}^s} + T^{2s(1-s)/\{(4+\theta)s-(2+\theta)\}}.$$

Capítulo 3

Propriedades das soluções da equação de Hasegawa Kodama com suporte compacto

Neste capítulo estudaremos propriedades das soluções de (18) em relação ao suporte, na primeira parte provaremos um resultado de continuação única, quando as soluções tem suporte compacto num intervalo de tempo, seguindo um argumento de Bourgain [2] e usaremos este resultado na segunda parte para provar um princípio de continuação única em dois tempos distintos seguindo as idéias de Kenig et al. em [30]. Aplicações de este tipo de resultados para a Teoria do Controle podem se encontrar em [43, 39] e aplicações para a Teoria da Transversalidade ver em [46].

3.1 Soluções com suporte compacto num intervalo de tempo

Consideramos a equação HK. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$; $\gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{C}$, $u = u(x,t)$ uma função de valores complexos,

$$\partial_t u + i\alpha\partial_x^2 u + \beta\partial_x^3 u + i\gamma|u|^2 u + \delta|u|^2\partial_x u + \epsilon u^2\partial_x \overline{u} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Provaremos o seguinte teorema seguindo o esquema de [2].

Teorema 3.1. *Seja $u = u(x,t)$ solução de (3.1), com $u \in \mathcal{C}([-T,T]; \mathbf{H}^s)$, $s \geq 4$. Se existe um intervalo $I = [-T,T]$ tal que*

$$supp\, u(t) \subseteq [-B, B] \qquad \forall t \in I.$$

Então

$$u(t) = 0 \qquad \forall t \in I.$$

Definimos para $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$ solução de HK,

$$\rho(\lambda) = \sup_{|\lambda'| \geq |\lambda|} \sup_{t \in I} |\mathcal{F}(u(t))(\lambda')| = \sup_{|\lambda'| \geq |\lambda|} u^*(\lambda'). \tag{3.2}$$

e

$$M = \sup_{t \in I} \|u(t)\|_{\mathbf{H^s}}.$$

Para provar o teorema precisaremos de algumos resultados preliminares.

3.1.1 Resultados preliminares

Temos o seguinte lema

Lema 3.1. *Sejam $u \in \mathcal{C}([-T,T]; \mathbf{H^s})$, $s \geq 4$ solução de (3.1), B como no Teorema 3.1, tem-se*

$$\rho(\lambda) \lesssim \frac{\sqrt{B}M}{1+\lambda^4}. \tag{3.3}$$

Demonstração: Se $t \in I$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t)(\xi)| d\xi = \int_{-B}^{B} |u(t)(\xi)| d\xi \leq \sqrt{2B} \|u(t)\|_{\mathbf{L^2}} \lesssim \sqrt{B} M,$$

segue-se que

$$\sup_{t \in I} \int_{\mathbb{R}} |u(t)(\xi)| d\xi \lesssim \sqrt{B} M,$$

daqui obtemos que para todo $t \in I$,

$$|\mathcal{F}(u(t))(\lambda + i\theta)| \lesssim \sqrt{B} M e^{|\theta| B}. \tag{3.4}$$

Logo $|\mathcal{F}(u(t))(\lambda)| \lesssim \sqrt{B}M$, e como $u \in \mathcal{C}([-T,T]; \mathbf{H^s})$, $s \geq 4$ usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$|\lambda|^s |\mathcal{F}(u(t))(\lambda)| = |\mathcal{F}(D_x^s u(t))(\lambda)| \leq \int_{\mathbb{R}} |D_x^s u(t)(x)| dx \lesssim \sqrt{B} M.$$

Isto encerra a prova do lema. □

Observação 3.1. *1) Temos que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\rho(\lambda) > 0$ pois se $\rho(\lambda) = 0$ então para todo $t \in I$, $\mathcal{F}(u(t))$ tem suporte compacto, logo $u(t)$ tem continuação analítica para uma função inteira e em conseqüência $u(t) = 0$ pois $u(t)$ tem suporte compacto.*

2) Pelo feito acima observamos que se u é tal que $\sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_{\mathbf{H^n}} \leq M_0$, para todo n e B como no Teorema 3.1, então

$$\rho(\lambda) \lesssim \frac{\sqrt{B} M_0}{1 + \lambda^n} \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N}^+,$$

Em conseqüencia teriamos que $u(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Agora usando (3.3) temos o seguinte lema,

Lema 3.2. *Sejam $u = u(x,t)$ uma solução de HK com as mesmas hipóteses do Teorema (3.1). Suponhamos que existe $t \in I$ tal que $u(t) \neq 0$, então existe $c > 0$ tal que para qualquer N arbitrariamente grande existem λ's arbitrariamente grandes tais que:*

$$\rho(\lambda) > c(\rho * \rho * \rho)(\lambda). \tag{3.5}$$

$$\rho(\lambda) > e^{-\frac{|\lambda|}{N}}. \tag{3.6}$$

Demonstração: Veja Lema em [2], página 440. □

Observe que se $\lambda > 0$ satisfaz (3.5) e (3.6) então $-\lambda < 0$ também satisfaz (3.5) e (3.6).

Afirmação 3.1. *Com as hipóteses do Lema (3.2), temos que existem λ, N arbitrariamente grandes e $t_\lambda := t_1 \in I$ tais que*

$$\rho(\lambda) = |\mathcal{F}(u(t_1))(\lambda)| \gtrsim (\rho * \rho * \rho)(\lambda), \quad \rho(\lambda) > e^{-\frac{|\lambda|}{N}}.$$

Demonstração: Da definição (3.2) temos que $u^*(x) \to 0$ se $|x| \to \infty$, agora usando a observação 3.1 temos que existe $M > 0$ tal que $\rho(\lambda) = \sup_{|\lambda| \leq |x| \leq M} u^*(x) = u^*(\omega_\lambda) = |\mathcal{F}(u(t_\lambda))(\omega_\lambda)|$, com $|\omega_\lambda| \geq |\lambda|$, logo do Lema 3.2 obtemos que

$$\rho(\omega_\lambda) = \rho(\lambda) > e^{-\frac{|\lambda|}{N}} \geq e^{-\frac{|\omega_\lambda|}{N}},$$

por ser ρ decrescente temos que $\rho * \rho * \rho$ é decrescente no sentido de que se $|x_1| \geq |x_2|$ então $\rho^{*3}(x_1) \lesssim \rho^{*3}(x_2)$, portanto como $|\omega_\lambda| \geq |\lambda|$ temos

$$\rho^{*3}(\omega_\lambda) \lesssim \rho^{*3}(\lambda) < c\rho(\lambda) = c\rho(\omega_\lambda) = c|\mathcal{F}(u(t_\lambda))(\omega_\lambda)|.$$

Isto encerra a prova da afirmação. □

Precisaremos também da fórmula da estimativa da derivada de uma função inteira. Usando medidas harmônicas e a desigualdade de A. A. Markov para polinômios: $\|P'\|_{\mathbf{L}^\infty[\mathbf{0},\mathbf{1}]} \leq 2n^2 \|P\|_{\mathbf{L}^\infty[\mathbf{0},\mathbf{1}]}$, n o grau do polinômio P (ver [40], pag 40) Bourgain prova o seguinte lema

Lema 3.3. *Sejam $\Phi(z)$ uma função inteira, limitada e integrável sobre o eixo real, tal que $|\Phi(\lambda + i\theta)| \lesssim e^{|\theta| B}$, com $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$, $B > 0$, para $x > 0$ $g(x) = x(1 + |\log x|)$ e seja também*

$$\tilde{\rho}(\lambda) = \sup_{|\lambda'| \geq \lambda > 0} |\Phi(\lambda')|.$$

Então

$$\sup_{|\lambda'| \geq \lambda > 0} |\Phi'(\lambda')| \lesssim Bg(\tilde{\rho}(\lambda)). \tag{3.7}$$

Demonstração: Veja a prova no Lema 2.2 de [2]. □

Corolário 3.1. *Seja* $v(\theta,\lambda) := \sup_{|\lambda'|\geq\lambda>0} |\Phi(\lambda'+i\theta)|$, *com as mesmas hipóteses do Lema 3.3 se* $\theta \in \mathbb{R}$ *é tal que* $|\theta| \lesssim \dfrac{1}{B(1+|\log\tilde{\rho}(\lambda)|)}$, *então*

$$B\int_0^\theta g(v(\tilde{\theta},\lambda))d\tilde{\theta} \lesssim \tilde{\rho}(\lambda), \tag{3.8}$$

$$v(\theta,\lambda) \lesssim \tilde{\rho}(\lambda) \tag{3.9}$$

e

$$\sup_{|\lambda'|\geq\lambda>0} |\Phi'(\lambda'+i\theta)| \lesssim Bg(\tilde{\rho}(\lambda)). \tag{3.10}$$

Demonstração: Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e o Lema 3.3 temos

$$\begin{aligned} v(\theta,\lambda) &\lesssim \tilde{\rho}(\lambda) + B\int_0^\theta g(v(\tilde{\theta},\lambda))d\tilde{\theta} \\ &=: \tilde{\rho}(\lambda) + Bh(\theta). \end{aligned}$$

Como g é crescente $h'(\theta) = g(v(\theta,\lambda)) \lesssim g(\tilde{\rho}(\lambda)+Bh(\theta)) =: g(H(\theta))$, portanto

$$\frac{H'(\theta)}{g(H(\theta))} \lesssim B. \tag{3.11}$$

Da definição de $H(\theta)$, $v(\theta,\lambda) \leq H(\theta)$ logo basta provar que $H(\theta) \lesssim \tilde{\rho}(\lambda)$ para $|\theta| \lesssim 1/B(1+|\log\tilde{\rho}(\lambda)|)$.

Integrando (3.11) de 0 a $\theta > 0$ e fazendo a mudança de variáveis $x = H(\theta)$ temos

$$G(H(\theta)) = \int_{\tilde{\rho}(\lambda)}^{H(\theta)} \frac{dx}{g(x)} \lesssim B\theta, \tag{3.12}$$

onde $G(w) := \int_{\tilde{\rho}(\lambda)}^{w} 1/g(x)\,dx$, como $G'(w) = 1/g(w) > 0$, temos que G e G^{-1} sao crescentes, de (3.12) temos que

$$H(\theta) \leq G^{-1}(x(\lambda))$$

onde $x(\lambda) \sim 1/(1+|\log\tilde{\rho}(\lambda)|)$, da definição de G temos

$$G^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{e}{\exp\{e^{-x}\log(e/\tilde{\rho}(\lambda))\}} & \text{se} \quad -\infty < x < \log\log(e/\tilde{\rho}(\lambda)) \\ \dfrac{1}{e}\exp\left\{\dfrac{1}{e^{-x}\log(e/\tilde{\rho}(\lambda))}\right\} & \text{se} \quad x > \log\log(e/\tilde{\rho}(\lambda)). \end{cases}$$

Provaremos que

$$G^{-1}(x(\lambda)) \lesssim \tilde{\rho}(\lambda). \tag{3.13}$$

Sabemos que $\tilde{\rho}(\lambda) \leq C$, consideramos dois casos:

i)$0 < x(\lambda) \leq \log\log(e/\tilde{\rho}(\lambda))$.

Quando $1 \leq \tilde{\rho}(\lambda)) \leq C$ é obvio, suponhamos então que $0 < \tilde{\rho}(\lambda)) \leq 1$, tomando logaritmo em (3.13) temos que provar a seguinte desigualdade equivalente: $\log(e/\tilde{\rho}(\lambda))(1-\exp\{-x(\lambda)\}) \lesssim 1$, mas esta desigualdade é verdadeira pois temos que para qualquer $c > 0$, $y > 0$, $y(1-\exp\{-c/y\}) < c$.

ii)$x(\lambda) \geq \log\log(e/\tilde{\rho}(\lambda))$.

Como acima, podemos supor que $0 < \tilde{\rho}(\lambda)) \leq 1$, então $x(\lambda) \geq \log\log(e/\tilde{\rho}(\lambda))$ é equivalente a: $\log(e/\tilde{\rho}(\lambda))[\log\log(e/\tilde{\rho}(\lambda))] \leq C$, isto implica que $\log(e/\tilde{\rho}(\lambda)) \leq 2^C$, portanto $\tilde{\rho}(\lambda) > e/\exp\{2^C\}$ o qual prova o corolário. $\square$

Para facilitar o trabalho com a estimativa da parte não linear, enunciamos como corolário o seguinte resultado

Corolário 3.2. *Sejam $t \in I$, $\Phi(z) = \mathcal{F}(u(t))(z)$, θ como no Corolário (3.1) e ρ como em (3.2), então para $|\theta'| \leq |\theta|$ fixo temos*

$$|\Phi'(\lambda - \lambda' + i\theta')| \lesssim B[\rho(\lambda) + \rho(\lambda - \lambda')][1 + |\log \rho(\lambda)|]. \tag{3.14}$$

Demonstração: Consideramos $\Theta(z) = \Phi(z + i\theta')$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ vemos que por (3.9) Θ é limitada e integrável sobre o eixo real. Usando (3.7) para Θ, temos que

$$\begin{aligned} |\Phi'(\lambda - \lambda' + i\theta')| &\leq \sup_{|\lambda| \geq \overline{\lambda} > 0} |\Phi'(\lambda + i\theta')| = \sup_{|\lambda| \geq \overline{\lambda} > 0} |\Theta'(\lambda)| \\ &\lesssim Bw(\overline{\lambda})(1 + |\log w(\overline{\lambda})|) \\ &\lesssim B\rho(\overline{\lambda})(1 + |\log \rho(\overline{\lambda})|), \end{aligned}$$

onde $\overline{\lambda} = \min\{|\lambda|, |\lambda - \lambda'|\}$ e $w(\lambda) = \sup_{|\lambda| \geq \overline{\lambda} > 0} |\Phi(\lambda + i\theta)|$, na terceira desigualdade usamos (3.9) e que $g(x) = x + x|\log x|$ é crescente para $x \geq 0$. É claro que para λ grande $|\log \rho(\lambda)| = -\log \rho(\lambda)$ e também é claro que

$$\rho(\overline{\lambda}) \leq \rho(\lambda) + \rho(\lambda - \lambda'). \tag{3.15}$$

Consideramos dois casos.

1) Se $\rho(\overline{\lambda}) < 1$, como $\overline{\lambda} \leq |\lambda|$ então $-\log \rho(\overline{\lambda}) \leq -\log \rho(\lambda)$.

2) Se $\rho(\overline{\lambda}) \geq 1$, usando (3.3) e tomando λ grande temos $\rho(\overline{\lambda})\rho(\lambda) \lesssim \rho(\lambda)/(1+\overline{\lambda}^4) < 1$ e portanto $\log \rho(\overline{\lambda}) \leq -\log \rho(\lambda)$.

Isto encerra a demonstração do corolário. $\square$

O Corolário 3.2, está implicito em [2].

Lema 3.4. *Se $\rho(\lambda)$ é a função definida em (3.2) então existe $a_0 > 0$ tal que:*

$$g(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \int_{|\xi|\geq|\lambda|} |\xi|\rho(\lambda - \xi - \eta)\rho(\eta) d\xi d\eta \leq |\lambda| a_0 + a_0.$$

Demonstração: Como g é par suporemos $\lambda > 0$, por (3.3) temos

$$\begin{aligned} g(\lambda) &\lesssim \int_{\mathbb{R}} \rho(\eta) \int_{|\xi|\geq|\lambda|} \frac{|\xi|}{1+(\lambda-\xi-\eta)^4} d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho(\eta) \Big[\int_{\lambda}^{\infty} \tfrac{|\xi|}{1+(\lambda-\xi-\eta)^4} d\xi + \int_{-\infty}^{-\lambda} \tfrac{|\xi|}{1+(\lambda-\xi-\eta)^4} d\xi \Big] d\eta. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Na primeira integral fazemos $\xi - \lambda = x$ para obter

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x+\lambda}{1+(\eta+x)^4} dx &= \lambda \int_0^{\infty} \frac{1}{1+(\eta+x)^4} dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{1+(\eta+x)^4} dx \\ &\leq \lambda b_1 + |\eta| b_1 + b_0. \end{aligned}$$

A mesma mudança $\xi - \lambda = x$ na segunda integral e obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-2\lambda} \frac{-x-\lambda}{1+(\eta+x)^4} dx &= -\lambda \int_{-\infty}^{-2\lambda} \frac{1}{1+(\eta+x)^4} dx - \int_{-\infty}^{-2\lambda} \frac{x}{1+(\eta+x)^4} dx \\ &\leq |\eta| b_1 + b_0. \end{aligned}$$

Portanto:

$$g(\lambda) \lesssim \int_{\mathbb{R}} \rho(\eta)(\lambda b_1 + 2|\eta| b_1 + 2b_0) d\eta \leq \lambda a_0 + a_0.$$

Isto encerra a demonstração do lema. $\square$

Daqui em diante consideraremos λ, t_1 como na Afirmação 3.1, $t_2 \in I$ tal que

$$|\Delta t| = |t_2 - t_1| = T = \frac{|I|}{2}, \tag{3.17}$$

e θ pequeno, tais que sinal $\theta =$ -sinal $(\beta\Delta t)$, escolhido o sinal para θ tomaremos o sinal para λ tal que sinal $\lambda =$ -sinal $(\alpha\theta\Delta t)$, portanto $\beta\theta\Delta t < 0$ e $\alpha\theta\lambda\Delta t \leq 0$.

3.1.2 Redução do problema usando a transformada de Fourier na fórmula de Duhamel

Escrevamos a fórmula de Duhamel para a equação HK

$$u(t_2)(x) = U(t_2 - t_1)u(t_1)(x) - \int_{t_1}^{t_2} U(t_2 - \tau)F(u)(\tau)(x)d\tau, \qquad (3.18)$$

onde $U(t)u = e^{-tP(D)}u$, $P(D)u = i\alpha\partial_x^2 u + \beta\partial_x^3 u$ parte linear de HK, $F(u) = i\gamma|u|^2u + \delta|u|^2\partial_x u + \epsilon u^2\partial_x\overline{u}$ parte não linear de HK.

Aplicando a transformada de Fourier $\mathcal{F}$, na variável x, em (3.18) temos

$$\mathcal{F}(u(t_2))(\lambda) = e^{i(\beta\lambda^3+\alpha\lambda^2)(t_2-t_1)}\mathcal{F}(u(t_1))(\lambda) - \int_{t_1}^{t_2} e^{i(\beta\lambda^3+\alpha\lambda^2)(t_2-\tau)}\mathcal{F}(F(u)(\tau))(\lambda)d\tau$$

Por hipótese, sabemos que $u(t)$ tem suporte compacto, pelo teorema de Paley-Wiener $\mathcal{F}(u(t))$ e $\mathcal{F}(F(u)(t))$ se estendem a uma função analítica em $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u(t_2))(\lambda+i\theta) =& e^{i(\beta(\lambda+i\theta)^3+\alpha(\lambda+i\theta)^2)(t_2-t_1)}\mathcal{F}(u(t_1))(\lambda+i\theta)\\ &- \int_{t_1}^{t_2} e^{i(\beta(\lambda+i\theta)^3+\alpha(\lambda+i\theta)^2)(t_2-\tau)}\mathcal{F}(F(u)(\tau))(\lambda+i\theta)d\tau. \qquad (3.19)\end{aligned}$$

Seja $\Delta t = t_2 - t_1$, tomando valor absoluto em (3.19) temos

$$\begin{aligned}e^{|\theta|B} &\gtrsim |\mathcal{F}(u(t_2))(\lambda+i\theta)|\\ &\geq e^{-3\Delta t\lambda^2\beta\theta-2\alpha\lambda\Delta t\theta+\theta^3\beta\Delta t}\Big[|\mathcal{F}(u(t_1))(\lambda+i\theta)| -\\ &\quad - \Big|\int_0^{\Delta t} e^{-i(\beta(\lambda+i\theta)^3+\alpha(\lambda+i\theta)^2)\tau}\mathcal{F}(F(u)(\tau+t_1))(\lambda+i\theta)d\tau\Big|\Big]. \qquad (3.20)\end{aligned}$$

Seja

$$J_0 = \int_0^{\Delta t} e^{(-i(\beta(\lambda+i\theta)^3+\alpha(\lambda+i\theta)^2)\tau)}\mathcal{F}(F(u)(\tau+t_1))(\lambda+i\theta)d\tau.$$

Se $\Delta t > 0$ temos

$$\begin{aligned}|J_0| &\leq \int_0^{|\Delta t|} e^{(3\beta\lambda^2\theta\tau+2\alpha\lambda\theta\tau-\theta^3\beta\tau)}|\mathcal{F}(F(u)(\tau+t_1))|(\lambda+i\theta)d\tau\\ &= \int_0^{|\Delta t|} e^{-3\lambda^2|\beta\theta|\tau-2\tau|\alpha\lambda\theta|-\theta^3\beta\tau}|\mathcal{F}(F(u)(\tau+t_1)|(\lambda+i\theta)d\tau.\end{aligned}$$

Se $\Delta t < 0$ fazendo $\tau = -\tau$ temos,

$$|J_0| \leq \int_0^{|\Delta t|} e^{(-3\lambda^2|\beta\theta|\tau-2\tau|\alpha\lambda\theta|+\theta^3\beta\tau)}|\mathcal{F}(F(u)(t_1-\tau))|(\lambda+i\theta)d\tau.$$

Denotamos por $(\Delta t)^+ = \Delta t = t_2 - t_1$ no caso que $\Delta t > 0$ e $(\Delta t)^- = -\Delta t = t_1 - t_2$ no caso que $\Delta t < 0$. Em geral temos

$$|J_0| \leq \int_0^{|(\Delta t)^{\pm}|} e^{(-3\lambda^2|\beta\theta|\tau - 2\tau|\alpha\lambda\theta| \mp \theta^3\beta\tau)} |\mathcal{F}(F(u)(t_1 \pm \tau))|(\lambda + i\theta) d\tau.$$

Daqui em diante consideraremos $(\Delta t)^+ = \Delta t > 0$, o caso $(\Delta t)^- = -\Delta t > 0$ é semelhante. Da desigualdade (3.20) temos que

$$\begin{aligned} e^{|\theta|B} e^{(3\Delta t\lambda^2\beta\theta + 2\alpha\lambda\Delta t\theta - \theta^3\beta\Delta t)} &\gtrsim |\mathcal{F}(u(t_1))(\lambda + i\theta)| - \\ - \int_0^{|\Delta t|} & e^{-3\lambda^2|\beta\theta|\tau - 2\tau|\alpha\lambda\theta| - \theta^3\beta\tau} |\mathcal{F}(F(u)(\tau + t_1))|(\lambda + i\theta) d\tau. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Para θ pequeno a desigualdade (3.21) fica:

$$\begin{aligned} e^{-3T\lambda^2|\beta\theta|} \gtrsim & |\mathcal{F}(u(t_1))(\lambda + i\theta)| \\ & - \int_0^T e^{-\tau(3\lambda^2|\beta\theta| + 2|\alpha\lambda\theta|)} |\mathcal{F}(F(u)(\tau + t_1))|(\lambda + i\theta) d\tau \\ \geq & I_1 - I_2 - I_3, \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde

$$I_1 = |\mathcal{F}(u(t_1))(\lambda)| - \int_0^T e^{-\tau(3\lambda^2|\beta\theta| + 2|\alpha\lambda\theta|)} |\mathcal{F}(F(u)(\tau + t_1))|(\lambda) d\tau, \tag{3.23}$$

$$I_2 = |\mathcal{F}(u(t_1))(\lambda + i\theta) - \mathcal{F}(u(t_1))(\lambda)|, \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} I_3 = & \int_0^T e^{-\tau(3\lambda^2|\beta\theta| + 2|\alpha\lambda\theta|)} |\mathcal{F}(F(u)(\tau + t_1))(\lambda + i\theta) \\ & - \mathcal{F}(F(u)(\tau + t_1))(\lambda)| d\tau. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Antes de provar o Teorema (3.1), façamos a seguinte observação

Observação 3.2. *Consideramos o problema linear (13) com α, β constantes reais. Suponhamos que $u_0 \neq 0$, tem suporte compacto ($u_0 = 0$ implica $u = 0$). Temos os seguintes resultados*

Teorema 3.2. *Seja $\phi \in \mathbf{L^2}$, supp ϕ compacto, então*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log |\mathcal{F}(\phi)(\lambda)|}{1 + \lambda^2} d\lambda > -\infty.$$

Demonstração: *Ver uma prova disto, no Teorema 2 da Seção 3.4 de [12].* □

Corolário 3.3. *Seja ϕ como no Teorema 3.2, existe uma seqüência (λ_n), $|\lambda_n| \to \infty$, tal que*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log |\mathcal{F}(\phi)(\lambda_n)|}{\lambda_n^2} = 0.$$

Demonstração: *De (3.4) temos*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log |\mathcal{F}(\phi)(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda \lesssim \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\lambda^2} < \infty.$$

Pelo Teorema 3.2 concluimos a prova. □

Usando o teorema de Paley-Wiener na equação (19):

$$|\mathcal{F}(u(t))(\lambda + i\theta)| = e^{t\{-2\lambda\alpha\theta - 3\lambda^2\beta\theta + \beta\theta^3\}} \, |\mathcal{F}(u_0)(\lambda + i\theta)|,$$

portanto

$$\frac{\log |\mathcal{F}(u(t))(\lambda + i\theta)|}{\lambda^2} = \frac{\log |\mathcal{F}(u_0)(\lambda + i\theta)|}{\lambda^2} + \frac{2\alpha t\theta}{\lambda} + 3\beta t\theta + \frac{\beta t\theta^3}{\lambda^2}.$$

Em conseqüência, pelo Corolário 3.3, se $u_0 \neq 0$, temos que para todo $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, o suporte de $u(t)$ não tem que ser compacto, é dizer, se a solução do problema linear (13) (coeficientes constantes), é diferente de zero, então no máximo, existe um único tempo t_0 tal que $u(t_0)$ tem suporte compacto, se existem dois tempos t_0, t_1 tal que $u(t_0)$ e $u(t_1)$ tem suporte compacto, então a solução de (13) é $u = 0$.

Observar que usando a Afirmação 3.1, existem seqüências $|\lambda_n| \to \infty$, $t_n \in I$ e $N_n \to \infty$ tais que

$$\frac{-1}{N_n|\lambda_n|} \leq \frac{\log |\mathcal{F}(u(t_n))(\lambda_n)|}{\lambda_n^2} \lesssim \frac{1}{\lambda_n^2}.$$

3.1.3 Prova do Teorema 3.1

Demonstração: A prova do teorema é pelo absurdo, suporemos que

$$u(t) \neq 0 \text{ para algum } t \in I. \tag{3.26}$$

E chegaremos a uma contradição. Isto é, mostraremos que não pode existir uma solução em $\mathbf{H}^s$, $s \geq 4$, com suporte compacto e diferente de zero da equação HK. Para demonstrar esta afirmação usaremos estimativas da parte não linear e provaremos que a desigualdade (3.22) é falsa para $|\lambda|$ grande, $|\theta|$ pequeno. O ingrediente principal da prova está na aplicação do Lema 3.2 para estimar os termos I_1, I_2 e I_3.

Estimativas da parte não linear

Usando o Corolário 3.2, com $\lambda' = 0$ e $|\theta| \lesssim \dfrac{1}{B(1+|\log\rho(\lambda)|)}$ em (3.24) temos que

$$I_2 < \frac{\rho(\lambda)}{10}. \tag{3.27}$$

Na parte não linear, seja $F_1(u) = i\gamma|u|^2u$, $F_2(u) = \delta|u|^2\partial_x u$ e $F_3(u) = \epsilon u^2\partial_x\overline{u}$, para estimar I_1 e I_3 observamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(F_1(u)) &= i\gamma\mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(\overline{u}). && (3.28)\\
\mathcal{F}(F_2(u)) &= i\delta\mathcal{F}(u) * (\xi\mathcal{F}(u)(\xi)) * \mathcal{F}(\overline{u}). && (3.29)\\
\mathcal{F}(F_3(u)) &= i\epsilon\mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(u) * (\xi\mathcal{F}(\overline{u})(\xi)). && (3.30)
\end{aligned}$$

Estimativa de I_1

Para simplificar a notação seja $\mathfrak{H} = 3\lambda^2|\beta\theta| + 2|\alpha\lambda\theta|$. De (3.23) temos

$$I_1 > \rho(\lambda) - I_1^1 - I_1^2, \tag{3.31}$$

onde

$$I_1^1 := \int_0^T e^{-\tau\mathfrak{H}}|\mathcal{F}(F_1(u))|d\tau, \quad I_1^2 := \int_0^T e^{-\tau\mathfrak{H}}|\mathcal{F}(F_2(u)) + \mathcal{F}(F_3(u))|d\tau.$$

De (3.2) e (3.28) temos

$$\begin{aligned}
I_1^1 =&\leq |\gamma|\rho^{*3}\int_0^T e^{-\tau(3\lambda^2|\beta\theta|+2|\alpha\lambda\theta|)}d\tau\\
&= \frac{|\gamma|\rho^{*3}(1-e^{-T(3\lambda^2|\beta\theta|+2|\alpha\lambda\theta|)})}{3\lambda^2|\beta\theta|+2|\alpha\lambda\theta|}\\
&\leq \frac{|\gamma|\rho^{*3}}{2|\alpha\lambda\theta|} \leq \frac{|\gamma|\rho(\lambda)}{2c|\alpha\lambda\theta|}, && (3.32)
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade tem-se pelo Lema 3.2.

Observação 3.3. *1) Para estimar a segunda integral de (3.31), se $\delta = 2\epsilon$ (não linearidade da forma $i\gamma|u|^2u + \epsilon(|u|^2u)_x$) a prova se simplifica usando a seguinte igualdade*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u) * (x\mathcal{F}(u)(x)) * \overline{\mathcal{F}^{-1}(u)}(z) \quad &+ \quad \frac{1}{2}\mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(u) * (x\overline{\mathcal{F}^{-1}(u)}(x))(z) =\\
&= \frac{z}{2}\mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(u) * \overline{\mathcal{F}^{-1}(u)}(z). && (3.33)
\end{aligned}$$

2) No caso de ter uma equação cuja solução é real e cuja parte não linear seja um polinômio com termos da forma $u^{p_0}u_x$, $p_0 \in \mathbb{N}$, usamos:

$$((xf(x)) * \overbrace{f * \ldots * f}^{d})(z) = \frac{z}{d+1}(\overbrace{f * \ldots f}^{d+1})(z).$$

No caso geral precisamos do Lema 3.4

Estimamos a segunda integral de (3.31):

$$\begin{aligned} I_1^2 \leq & \int_0^T e^{-\tau\mathfrak{H}} \rho * \rho * (|\xi|\rho(\xi))(\lambda)|\delta+\epsilon| d\tau \\ =& |\delta+\epsilon|\rho * \rho * (|\xi|\rho(\xi))(\lambda) \int_0^T e^{-\tau\mathfrak{H}} d\tau, \end{aligned} \tag{3.34}$$

temos que

$$\rho * \rho * (|x|\rho(x))(\lambda) \leq |\lambda|(\rho * \rho * \rho)(\lambda) + \rho(\lambda) \int_{|\xi|\geq|\lambda|} |\xi|\rho(\lambda-\xi-\eta)\rho(\eta) d\xi d\eta.$$

Portanto I_1^2 está limitada por

$$\begin{aligned} I_1^2 &\leq |\delta+\epsilon|(|\lambda|\rho^{*3} + a_0\rho(\lambda)(1+|\lambda|)) \int_0^T e^{-\tau\mathfrak{H}} d\tau \\ &\leq |\delta+\epsilon|(|\lambda|c^{-1}\rho(\lambda) + a_0\rho(\lambda)(1+|\lambda|)) \int_0^T e^{-\tau\mathfrak{H}} d\tau \\ &\leq |\delta+\epsilon|\Big(\frac{|\lambda|\rho(\lambda)(c^{-1}+a_0)}{3\lambda^2|\theta\beta|} + \frac{\rho(\lambda)a_0}{2|\alpha\lambda\theta|}\Big) \\ &= k_0\frac{\rho(\lambda)}{|\lambda\theta|}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

De (3.31), (3.32) e (3.35) maioramos I_1

$$I_1 \geq \rho(\lambda) - \frac{\rho(\lambda)}{|\lambda\theta|}\Big(k_0 + \frac{|\gamma|}{2c|\alpha|}\Big) > \frac{\rho(\lambda)}{2}, \tag{3.36}$$

onde na última desigualdade escolhemos

$$|\theta| \geq \frac{\mathcal{C}_1}{|\lambda|}. \tag{3.37}$$

Estimativa de I_3

Da forma de I_3 temos que

$$I_3 \leq \int_0^T (L_1 + L_2 + L_3) e^{-\tau \mathfrak{H}} d\tau,$$

onde

$$\begin{aligned} L_1 :=& |\mathcal{F}(F_1)(\lambda + i\theta) - \mathcal{F}(F_1)(\lambda)|, \\ L_2 :=& |\mathcal{F}(F_2)(\lambda + i\theta) - \mathcal{F}(F_2)(\lambda)|, \\ L_3 :=& |\mathcal{F}(F_3)(\lambda + i\theta) - \mathcal{F}(F_3)(\lambda)|, \end{aligned}$$

o primeiro, segundo e terceiro termo do integrando da equação acima.

Em L_1 tem-se

$$\begin{aligned} L_1 =& |\gamma||\mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(u) * \overline{\mathcal{F}^{-1}(u)}(\lambda + i\theta) - \mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(u) * \overline{\mathcal{F}^{-1}(u)}(\lambda)| \\ =& |\gamma|| \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(u)(\lambda + i\theta - \xi - \eta)\mathcal{F}(u)(\eta)\overline{\mathcal{F}^{-1}(u)}(\xi) d\eta d\xi - \\ & - \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(u)(\lambda - \xi - \eta)\mathcal{F}(u)(\eta)\overline{\mathcal{F}^{-1}(u)}(\xi) d\eta d\xi| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq& |\gamma||\theta| \int_{\mathbb{R}^2} \sup_{|\theta'| \leq |\theta|} |(\mathcal{F}(u(t_1 + \tau)))'(\lambda + i\theta' - \xi - \eta)|\rho(\eta)\rho(\xi) d\xi d\eta \\ \leq& |\gamma| \int_{\mathbb{R}^2} (\rho(\lambda) + \rho(\lambda - \xi - \eta))\rho(\eta)\rho(\xi) d\xi d\eta \\ \leq& |\gamma|(\rho(\lambda)k_1^2 + \rho^{*3}) \\ \leq& \rho(\lambda)(k_1^2|\gamma| + c^{-1}|\gamma|), \end{aligned} \tag{3.38}$$

onde $k_1 = \int_{\mathbb{R}} B_1/(1+\lambda^4) d\lambda$, a segunda desigualdade segue-se do Corolário 3.2 tomando $|\theta| \lesssim 1/B(1 + |\log \rho(\lambda)|)$, na última usamos o Lema 3.2.

Em L_2 temos

$$\begin{aligned} L_2 =& |\delta||\mathcal{F}(u) * (x\mathcal{F}(u)(x)) * \overline{\mathcal{F}^{-1}(u)}(\lambda + i\theta) - \mathcal{F}(u) * (x\mathcal{F}(u)(x)) * \overline{\mathcal{F}^{-1}(u)}(\lambda)| \\ \leq& |\delta| \int_{\mathbb{R}^2} (\rho(\lambda) + \rho(\lambda - \xi - \eta)\,)\rho(\eta)|\xi|\rho(\xi) d\xi d\eta \\ \leq& |\delta|\rho(\lambda) \int_{\mathbb{R}} |\xi|\rho(\xi) d\xi \int_{\mathbb{R}} \rho(\eta) d\eta + |\delta|\rho * \rho * (|x|\rho(x))(\lambda) \\ \leq& |\delta| k_2 \rho(\lambda) + |\delta|(|\lambda|\rho^{*3} + \rho(\lambda)(|\lambda| a_0 + a_0)) \\ \leq& |\delta|\rho(\lambda)(k_2 + a_0) + |\delta|\rho(\lambda)|\lambda|(c^{-1} + a_0), \end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade procedemos como com L_1, na terceira usamos o Lema 3.4 e na última o Lema 3.2.

Com L_3 procedemos igual que com L_2, obtemos que

$$\begin{aligned} L_3 =& |\epsilon||\mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(u) * (x\overline{\mathcal{F}^{-1}}(u)(x))(\lambda + i\theta) - \mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(u) * (x\overline{\mathcal{F}^{-1}(u)}(x))(\lambda)| \\ \leq& |\epsilon|\rho(\lambda)(k_2 + a_0) + |\epsilon|\rho(\lambda)|\lambda|(c^{-1} + a_0). \end{aligned}$$

Assim temos

$$L_2 + L_3 \lesssim (|\epsilon| + |\delta|)(\rho(\lambda) + \rho(\lambda)|\lambda|). \tag{3.39}$$

Logo de (3.38) e (3.39)

$$L_1 + L_2 + L_3 \lesssim \rho(\lambda) + \rho(\lambda)|\lambda|,$$

segue-se que para I_3

$$I_3 \leq \int_0^T (L_1 + L_2 + L_3) e^{-3\tau(\lambda^2|\beta\theta| + 2|\alpha\lambda\theta|)} d\tau \leq \frac{\rho(\lambda)}{|\lambda\theta|}\mathcal{C}_2 < \frac{\rho(\lambda)}{10}, \tag{3.40}$$

onde na última desigualdade tomamos $|\theta|$ tal que $|\theta| > \dfrac{10\mathcal{C}_2}{|\lambda|}$.

Para a escolha de $\theta = \theta(\lambda)$ é fácil ver que $10\mathcal{C}_2 > \mathcal{C}_1$ e portanto também temos (3.37), além disto também é fácil ver que se $\mathcal{C} > 0$ é uma constante e λ é suficientemente grande então

$$\frac{10\mathcal{C}_2}{|\lambda|} < \frac{\mathcal{C}}{B(1 + |\log \rho(\lambda)|)}.$$

Logo tomamos $|\theta|$ entre estos dois valores.

De (3.22), (3.27), (3.36) e (3.40) segue-se que

$$\begin{aligned} e^{-3T\lambda^2|\beta\theta|} \gtrsim& \frac{\rho(\lambda)}{2} - \frac{\rho(\lambda)}{10} - \frac{\rho(\lambda)}{10} \\ >& \frac{3}{10} e^{-|\lambda|/N}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Agora como $|\lambda\theta| > 10\mathcal{C}_2$, segue-se por (3.41) que

$$m_0\, e^{-m_1|\lambda|} \geq e^{-|\lambda|/N},$$

com $m_0 > 0$, $m_1 > 0$ constantes. Mas esta desigualdade é falsa para valores grandes de N e λ, chega-se a uma contradição se tomamos por exemplo $N > 2/m_1$ e $|\lambda| > 2|\log m_0|/m_1$.

Portanto o teorema fica demonstrado. □

3.2 Soluções com suporte definido em dois tempos distintos

Consideramos a equação HK. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$

$$\partial_t u + i\alpha\partial_x^2 u + \beta\partial_x^3 u + i\gamma|u|^2 u + \delta|u|^2\partial_x u + \epsilon u^2\partial_x\overline{u} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}. \tag{3.42}$$

Provaremos o seguinte teorema seguindo o esquema de [30].

Teorema 3.3. *Seja $u \in \mathcal{C}([t_1, t_2]; \mathbf{H^s}) \cap \mathcal{C}^1([t_1, t_2]; \mathbf{H^1})$, $s \geq 4$, uma solução de HK. Se existe $t_1 < t_2$ tal que*

$$supp\, u(\cdot, t_j) \quad \subset \quad (-\infty, b) \qquad j = 1, 2 \tag{3.43}$$

$$(\, supp\, u(\cdot, t_j) \quad \subset \quad (a, \infty) \qquad j = 1, 2\,). \tag{3.44}$$

Então

$$u(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in [t_1, t_2].$$

Por razões de carater técnico faremos a seguinte observação

Observação 3.4. *Podemos supor que $\beta > 0$, e se $\alpha \neq 0$ podemos supor que $\beta = |\alpha|/3$ com efeito:*

Se $\beta < 0$ consideramos $w(x,t) = u(x, -t)$, assim w é uma solução de HK com o coeficiente da terceira derivada positivo, satisfazendo (3.43) ou (3.44).

Se $\beta > 0$, $\alpha \neq 0$, consideramos $w(x,t) = u(a^{-1}x, t)$ com $a = |\alpha|/3\beta$, então w é solução de HK :

$$w_t + i\alpha a^2 w_{xx} + \beta a^3 w_{xxx} + i\gamma|w|^2 w + \delta a|w|^2 w_x + \epsilon a w^2\overline{w_x} = 0,$$

e aqui $|\alpha|a^2/3 = \beta a^3 = |\alpha|^3/(27\beta^2)$, além disto é fácil ver que se u cumpre com as hipóteses (3.43) ou (3.44), então w também cumpre com as mesmas hipóteses.

Usaremos o Corolário 0.1, [47].

3.2.1 Propriedades de decaimento da solução

Precisamos dos seguintes resultados preliminares

Lema 3.5. *Seja $u = u(x,t)$ solução de HK tal que*

$$\sup_{t \in [-T,T]} \|u(\cdot, t)\|_{\mathbf{H^1}} = c_0 < \infty.$$

Se para todo $\xi > 0$ $\quad e^{\xi x}u_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ então para todo $\xi > 0$, $e^{\xi x}u \in \mathcal{C}([-T,T]; \mathbf{L}^2(\mathbb{R}))$.

Demonstração: Pela observação (3.4), suponhamos que $\beta > 0$ e $|\alpha|/3 \leq \beta$.

Consideramos: $\varphi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \varphi_n \leq e^{\xi x}$, $\varphi_n(x) = e^{\xi x}$; $x \leq n$, $\varphi_n(x) = e^{2n\xi}$; $x > 10n$, $0 \leq \varphi_n'(x) \leq \xi\varphi_n(x)$ e $|{\varphi_n}^{(j)}(x)| \leq \xi^j \varphi_n(x)$ $\quad j = 2, 3$, multiplicando (3.42) por $\varphi_n \overline{u}$ e tomando a parte real deste produto, temos depois de integrar:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int |u|^2\varphi_n &= 2\alpha Im\int u_{xx}\overline{u}\varphi_n - 2\beta Re\int u_{xxx}\overline{u}\varphi_n - \\
&\quad - 2(\delta+\epsilon)Re\int u_x\overline{u}|u|^2\varphi_n. \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

Integrando por partes temos que:

$$
Re\int u_x\overline{u}|u|^2\varphi_n = -\frac{1}{4}\int |u|^4\varphi_n' \qquad (3.46)
$$

$$
2Re\int u_{xxx}\overline{u}\varphi_n = -\int |u|^2\varphi_n^{(3)} + 3\int |u_x|^2\varphi_n' \qquad (3.47)
$$

$$
Im\int u_{xx}\overline{u}\varphi_n = Im\int u\overline{u_x}\varphi_n'. \qquad (3.48)
$$

Como $\varphi_n' \geq 0$ e como

$$
Im\int u\overline{u_x}\varphi_n' \leq \frac{1}{2}\Big(\int |u|^2\varphi_n' + \int |u_x|^2\varphi_n'\Big),
$$

de (3.45), (3.46), (3.47) e (3.48) acima temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int |u|^2\varphi_n \leq& |\alpha|\int |u|^2\varphi_n' + |\alpha|\int |u_x|^2\varphi_n' + \beta\int |u|^2\varphi_n^{(3)} \\
&-3\beta\int |u_x|^2\varphi_n' + \frac{(\delta+\epsilon)}{2}\int |u|^4\varphi_n' \\
=&(|\alpha| - 3\beta)\int |u_x|^2\varphi_n' + |\alpha|\xi\int |u|^2\varphi_n + \beta\xi^3\int |u|^2\varphi_n + \\
&+\frac{(\delta+\epsilon)}{2}\xi\int |u|^4\varphi_n \\
\leq&(|\alpha|\xi + \beta\xi^3)\int |u|^2\varphi_n + \frac{(\delta+\epsilon)}{2}\xi\|u\|_\infty^2\int |u|^2\varphi_n. \qquad (3.49)
\end{aligned}
$$

Integrando e aplicando a desigualdade de Gronwall,

$$
\int |u|^2\varphi_n \leq \int |u_0|^2\varphi_n e^{\mathcal{C}},
$$

onde $\mathcal{C} = |\alpha|\xi + \beta\xi^3 + \frac{(\delta+\epsilon)}{2}\xi c_0$ e no limite,

$$
ue^{\xi x} \in \mathcal{C}([-T, T]; \mathbf{L^2}(\mathbb{R})).
$$

□

Em geral temos o seguinte lema.

Lema 3.6. *Seja* $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$ *e* $u = u(x,t)$ *solução de HK tal que*

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|u(\cdot,t)\|_{\mathbf{H^n}} = c_n < \infty.$$

Se para todo $\xi > 0$ $\quad e^{\xi x}u_0, \ldots e^{\xi x}\partial_x^{n-1}u_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ *então para todo* $\xi > 0$,

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|e^{\xi x}u(\cdot,t)\|_{\mathbf{H^{n-1}}} < \infty.$$

Demonstração: Provaremos o lema por indução, suponhamos que para $n \leq k$ temos o Lema 3.6, provemos para $n = k+1,\ k \geq 1$. Derivando k vezes (3.42) temos:

$$\partial_t\partial_x^k u + i\alpha\partial_x^2\partial_x^k u + \beta\partial_x^3\partial_x^k u + i\gamma\partial_x^k(|u|^2u) + \delta\partial_x^k(|u|^2\partial_x u) + \epsilon\partial_x^k(u^2\partial_x\overline{u}) = 0. \tag{3.50}$$

Seja $v = \partial_x^k u$ e $G(u)$ a parte não linear de (3.50) como no Lema 1, temos usando (3.47) e (3.48):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int |v|^2\varphi_n \leq &(|\alpha| - 3\beta)\int |v_x|^2\varphi_n' + |\alpha|\xi\int |v|^2\varphi_n + \beta\xi^3\int |v|^2\varphi_n - \\ &- \int \varphi_n(G(u)\overline{v} + \overline{G(u)}v).\end{aligned}$$

Como no Lema 3.5, sem perda de generalidade podemos supor que $|\alpha| - 3\beta \leq 0, \beta > 0$, logo:

$$\frac{d}{dt}\int |v|^2\varphi_n \leq (|\alpha|\xi + \beta\xi^3)\int |v|^2\varphi_n - \int \varphi_n(G(u)\overline{v} + \overline{G(u)}v). \tag{3.51}$$

Por hipótese de indução basta somente provar que $e^{\xi x}v \in \mathcal{C}([-1,1];\mathbf{L}^2(\mathbb{R}))$, supondo que para todo $\xi > 0$ $\ e^{\xi x}u_0, \ldots e^{\xi x}\partial_x^k u_0 \in \mathbf{L^2}$ e $\sup_{t\in[-T,T]}\|u(\cdot,t)\|_{\mathbf{H^{k+1}}} < \infty$. Para isto estimaremos a última integral de (3.51), temos que:

$$G(u)\overline{v} + \overline{G(u)}v = -2\gamma Im(\partial_x^k(|u|^2u)\overline{v}) + 2\delta Re(\partial_x^k(|u|^2\partial_x u)\overline{v}) + 2\epsilon Re(\partial_x^k(u^2\partial_x\overline{u})\overline{v}).$$

Chamamos por I_1^k, I_2^k, I_3^k o primeiro, segundo e terceiro termo da equação anterior. Pela hipótese de indução, teorema de imersão de Sobolev e a regra de Leibnitz temos

$$\Big|\int I_1^k\varphi_n\Big| \leq 2|\gamma|\mathcal{C}_1\sum_{r=0}^{k}\int |\partial_x^r u|^2\varphi_n, \tag{3.52}$$

onde $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1(\|\partial^j u\|_\infty, \xi)$ e $0 \leq j \leq k$, em I_2^k temos:

$$\partial_x^k(|u|^2\partial_x u)\overline{v} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial_x^j(|u|^2)\partial_x^{k-j}(\partial_x u)\overline{v},$$

para $j \neq 0$ temos uma estimativa como em (3.52), para $j = 0$ a somatoria tem uma derivada de ordem $k+1$, com I_3^k acontece igual, logo:

$$\begin{aligned}\Big|\int \varphi_n(I_2^k + I_3^k)\Big| \leq & 2(|\xi| + |\delta|)\Big[\mathcal{C}_2 \sum_{r=0}^{k} \int |\partial_x^r u|^2 \varphi_n \\ & + \Big|Re\int (|u|^2(\partial_x^{k+1}u)\overline{v}\varphi_n\Big| + \Big|Re\int u^2\partial_x^{k+1}(\overline{u})\overline{v}\varphi_n\Big|\Big], \qquad (3.53)\end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2(\|\partial_x^j u\|_\infty, \xi)$ e $0 \leq j \leq k$, chamamos por S_1, S_2 a penúltima e última integral respectivamente da desigualdade anterior, integrando por partes S_1 temos:

$$2ReS_1 = -\int |uv|^2\varphi_n' - 2\int |v|^2 Re(\partial_x u)\overline{u}\varphi_n,$$

logo

$$2|ReS_1| \leq \mathcal{C}_3 \int |v|^2\varphi_n, \qquad (3.54)$$

onde $\mathcal{C}_3 = \xi\|u\|_\infty^2 + 2\|\partial_x u\|_\infty\|u\|_\infty$, integrando por partes S_2 temos

$$S_2 = \int \overline{v}^2 u(\partial_x u)\varphi_n - \frac{1}{2}\int \overline{v}^2 u^2\varphi_n',$$

logo

$$|ReS_2| \leq |S_2| \leq \mathcal{C}_4 \int |v|^2\varphi_n, \qquad (3.55)$$

onde $\mathcal{C}_4 = \dfrac{\xi\|u\|_\infty^2}{2} + \|\partial_x u\|_\infty\|u\|_\infty$.

De (3.51), (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55) tem-se que

$$\frac{d}{dt}\int |v|^2\varphi_n \leq \mathcal{A}_1 \int |v|^2\varphi_n + \mathcal{A}_2 \sum_{r=0}^{k-1} \int |\partial_x^r u|^2\varphi_n,$$

onde $\mathcal{A}_1 = |\alpha|\xi + \beta\xi^3 + 2|\gamma|\mathcal{C}_1 + 2(|\epsilon| + |\delta|)(\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4)$ e $\mathcal{A}_2 = 2|\gamma|\mathcal{C}_1 + 2(|\epsilon| + |\delta|)\mathcal{C}_2$, por hipótese de indução :

$$\sum_{r=0}^{k-1} \int |\partial_x^r u|^2\varphi_n \leq c_{k-1} \quad \forall t \in [-T, T],$$

usando a desigualdade de Gronwall temos

$$\int |v(x,t)|^2\varphi_n(x)dx \leq (\int |v(x,0)|^2\varphi_n(x)dx + \mathcal{A}_2 c_{k-1})e^{\mathcal{A}_1}.$$

Como $v = \partial_x^k u$, $e^{\xi x}\partial_x^k u_0 = e^{\xi x}\partial_x^k v(x,0)$ no limite quando n vai para infinito temos o resultado. $\square$

3.2.2 Redução do problema usando multiplicadores

Lema 3.7. *Se* $f \in \mathcal{C}_0^{3,1}(\mathbb{R}^2)$ *então*

$$\|e^{\lambda x} f\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}^2)} \leq c(\beta)\|e^{\lambda x}(\partial_t + i\alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x^3)f\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.56}$$

Para todo α, $\lambda \in \mathbb{R}$ *com* $c = c(\beta)$ *independente de* λ, α.

Demonstração: Dividimos a prova em vários pasos:

Paso 1 : É suficiente provar (3.56) para $\lambda = \pm 1$.

Demonstração: O fato fundamental da prova está em que $c = c(\beta)$ é independente de α e λ. É suficiente considerar o caso $\lambda > 0$, logo se temos que:

$$\|e^x f\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}^2)} \leq c\|e^x(\partial_t + i\alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x^3)f\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)},$$

mediante a mudança de variáveis $(y,s) = (x/\lambda, t/\lambda^3)$, obtem-se

$$\begin{aligned} \|e^x f_\lambda\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}^2)} &= \lambda^{1/2}\|e^{\lambda y} f\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}^2)} \\ \|e^{\lambda x}(\partial_t + i\alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x^3)f_\lambda\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)} &= \lambda^{1/2}\|e^{\lambda y}(\partial_s + i\alpha\lambda\partial_y^2 + \beta\partial_y^3)\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Como $c = c(\beta)$ é independente do coeficiente da segunda derivada temos o resultado. $\square$

Observação 3.5. *Da Observação 3.2 concluimos que se* $f \in \mathcal{C}_0^{3,1}(\mathbb{R}^2)$, *então* $(\partial_t + i\alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x^3)f = 0$ *implica* $f = 0$.

Paso 2 : Para provar (3.56) é suficiente provar

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}^2)} \leq& c(\beta)\|(\partial_t + \beta\partial_x^3 - 3\beta\partial_x^2 + 3\beta\partial_x - \beta + i\alpha + i\alpha\partial_x^2 - 2i\alpha\partial_x)g\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)} \\ =& c(\beta)\|(\partial_t + \beta(\partial_x - 1)^3 + i\alpha(\partial_x - 1)^2)g\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Para todo $g \in \mathcal{C}_0^{3,1}(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração: Se temos (3.57), basta fazer $g(x,t) = e^x f(x,t)$ para obter (3.56). $\square$

Paso 3 : Precisamos dos seguintes lemas:

Proposição 3.1. *Se $\phi(\xi) = a_3\xi^3 + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0,\ a_3 \neq 0,\ f \in \mathcal{C}_0^{3,1}(\mathbb{R}^2)$ então:*

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(x,t)\cdot(\xi,\phi(\xi))} \mathcal{F}(f)(\xi,\phi(\xi)) d\xi \Big\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}^2)} \lesssim |a_3|^{-1/4} \|f\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.58}$$

Demonstração: Definamos

$$(V(t)v_0)(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi + t\phi(\xi))} \mathcal{F}(v_0)(\xi) d\xi = \mathcal{F}^{-1}(e^{it\phi(\cdot)} \mathcal{F}(v_0)(\cdot))(x). \tag{3.59}$$

Temos que:

$$\int_{\mathbb{R}} V(t-t') f(x,t') dt' = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x,t)\cdot(\xi,\phi(\xi))} \mathcal{F}(f)(\xi,\phi(\xi)) d\xi.$$

Mostraremos então que:

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}} V(t-t') f(x,t') dt' \Big\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}^2)} \lesssim |a_3|^{-1/4} \|f\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.60}$$

Para provar (3.60) do Lema 1.6 do Capítulo 1, com $q = 8$, temos que:

$$\|V(t)v_0\|_{\mathbf{L^8(R)}} \lesssim |a_3 t|^{-1/4} \|v_0\|_{\mathbf{L^{8/7}(R)}}. \tag{3.61}$$

Provemos agora (3.60), temos

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_{\mathbb{R}} V(t-t') f(x,t') dt' \Big\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}^2)} &= \Big\| \Big\| \int_{\mathbb{R}} V(t-t') f(x,t') dt' \Big\|_{\mathbf{L^8_x(R)}} \Big\|_{\mathbf{L^8_t(R)}} \\
&\leq \Big\| \int_{\mathbb{R}} \|V(t-t') f(x,t')\|_{\mathbf{L^8_x(R)}} dt' \Big\|_{\mathbf{L^8_t(R)}} \\
&\lesssim |a_3|^{-1/4} \Big\| \int_{\mathbb{R}} \frac{\|f(\cdot,t')\|_{\mathbf{L^{8/7}_x(R)}}}{|t-t'|^{\frac{1}{4}}} dt' \Big\|_{\mathbf{L^8_t(R)}} \\
&\lesssim |a_3|^{-1/4} \|f\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)},
\end{aligned} \tag{3.62}$$

onde na primeira desigualdade usamos a desigualdade de Minkowski, na segunda usamos (3.61) e na última integração fracionária. $\square$

Proposição 3.2.

$$\|h\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}^2)} \lesssim |\beta|^{-1/4} \|(\partial_t + \beta\partial_x^3 + i\alpha\partial_x^2 + \zeta\partial_x + i\theta + a)h\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)}, \tag{3.63}$$

com $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, para todo $h \in \mathcal{C}_0^{3,1}(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração: Usamos a desigualdade do multiplicador, seja

$$Sh(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x,t)\cdot(\xi,\tau)} \frac{1}{(\tau - \phi(\xi)) - ia} \mathcal{F}(h)(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

com $\phi(\xi) = \beta\xi^3 + \alpha\xi^2 - \zeta\xi - \theta$, logo provar (3.63) é equivalente a provar

$$\Big\| Sh(x,t) \Big\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}^2)} \lesssim |\beta|^{-1/4} \|h\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.64}$$

Temos:

$$Sh(x,t) = \int_{\mathbb{R}} b(s) V(s) h(\cdot, t-s)(x) ds, \tag{3.65}$$

onde $V(s)$ é o grupo unitário definido em (3.59) com $a_3 = \beta$, $a_2 = \alpha$, $a_1 = -\zeta$, $a_0 = -\theta$ e

$$b(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{is\tau}}{\tau - ia} d\tau = \begin{cases} 2i\pi e^{-as}\, \chi_{\{s \leq 0\}}(s) & \text{se } a < 0 \\ 2i\pi e^{-as} \chi_{\{s \geq 0\}}(s) & \text{se } a > 0. \end{cases}$$

Como $|b(s)| \leq 2\pi$ $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall s \in \mathbb{R}$, usando (3.61) e integração fracionária obtemos o resultado. $\square$

Paso 4 : Provaremos agora (3.57), seja

$$Lh = (\partial_t + \beta\partial_x^3 - 3\beta\partial_x^2 + 3\beta\partial_x - \beta + i\alpha\partial_x^2 - 2i\alpha\partial_x + i\alpha)h,$$

então:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(Lh)(\xi,\tau) =& [i(\tau - \phi(\xi)) + \varsigma(\xi)]\mathcal{F}(h)(\xi,\tau) \\ =& \varphi(\xi,\tau)\mathcal{F}(h)(\xi,\tau), \end{aligned}$$

com $\phi(\xi) = \beta\xi^3 + \alpha\xi^2 - 3\beta\xi - \alpha$, $\varsigma(\xi) = 3\beta\xi^2 + 2\alpha\xi - \beta$ como $\beta \neq 0$, temos que $\varphi(\xi,\tau) = 0$, no par de pontos:

$$P_{\pm} = (\xi_0^{\pm}, \tau_0^{\pm}) = \Big(-\frac{\alpha}{3\beta} \pm \sqrt{\Big(\frac{\alpha}{3\beta}\Big)^2 + \frac{1}{3}},\, \phi(\xi_0^{\pm}) \Big).$$

Se $\alpha \neq 0$ pela observação (3.4), consideramos $\beta > 0$ e $|\alpha|/3\beta = 1$, portanto temos,

$$\xi_0^{\pm} = \begin{cases} \pm 1/\sqrt{3} & \text{se } \alpha = 0 \\ -1 \pm \sqrt{4/3} & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 \pm \sqrt{4/3} & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\xi_0^+ > 0, \qquad \xi_0^- < 0, \qquad |\xi_0^{\pm}| \sim 1. \tag{3.66}$$

Por ser h de suporte compacto, provaremos (3.57) supondo $h \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^2)$, com $\mathcal{F}(h)(P_{\pm}) = 0$, portanto (3.57) é equivalente com a seguinte desigualdade do multiplicador:

$$\|Sh(x,t)\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}^2)} \leq c(\beta)\|h\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)}, \tag{3.67}$$

onde

$$Sh(x,t) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{i(x,t)\cdot(\xi,\tau)} \frac{1}{i(\tau - \phi(\xi)) + \varsigma(\xi)} \mathcal{F}(h)(\xi,\tau) d\xi d\tau. \tag{3.68}$$

Obtemos (3.67), supondo $supp\mathcal{F}(h) \subset \{(\xi,\tau) : \xi \geq 0\}$, a prova para o caso $supp\mathcal{F}(h) \subset \{(\xi,\tau) : \xi < 0\}$ é similar.

Da teoria de Litlewood-Paley basta demonstrar (3.67) para cada $M_k h$ (ver a Etapa 5 de [30]), onde

$$\mathcal{F}(M_k h)(\xi,\tau) = \chi_{[1/2,1]}(|\xi - \xi_0^+|/2^{-k})\mathcal{F}(h)(\xi,\tau) \quad k \in \mathbf{Z},$$

logo suporemos que:

$$supp\,\mathcal{F}(h) \subseteq \{(\xi,\tau) : \ \xi \geq 0, \ 2^{-k-1} \leq |\xi - \xi_0^+| < 2^{-k}\}.$$

Suponhamos que $k \leq 0$:

Se $\xi \in supp\,\mathcal{F}(h)$, então de (3.66) temos,

$$\varsigma(\xi) \sim |\xi - \xi_0^+|\,|\xi - \xi_0^-| \sim 2^{-k}2^{-k}.$$

Com efeito: como $|\xi| \lesssim 2^{-k}$, $|\xi_0^-| \lesssim 2^{-k}$, então $|\xi - \xi_0^-| \lesssim 2^{-k}$, por outro lado seja $c_0 = \xi_0^+ - \xi_0^-$, temos $1 < c_0 < 4$ e para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$|\xi - \xi_0^-| \geq \max\{c_0 - 2^k, 2^{-k-1} - c_0\}, \tag{3.69}$$

em conseqüência $|\xi - \xi_0^-| \gtrsim 2^{-k}$ se $k \leq 0$. Usando a Proposição 3.2 basta provar a desigualdade para o multiplicador:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i(\tau - \phi(\xi)) + \varsigma(\xi)} - \frac{1}{i(\tau - \phi(\xi)) + 2^{-2k}} =& \frac{(2^{-2k} - \varsigma(\xi))}{[i(\tau - \phi(\xi)) + \varsigma(\xi)][i(\tau - \phi(\xi)) + 2^{-2k}]} \\ =& m_1(\xi,\tau).\end{aligned}$$

Se $\mathcal{F}(S_k h)(x,t) := m_1(x,t)\mathcal{F}(M_k h)(x,t)$, temos:

$$S_k h(x,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x,t)\cdot(\xi,\phi(\xi))} \mathcal{F}(h_\tau)(\xi,\phi(\xi)) d\xi d\tau,$$

onde

$$\mathcal{F}(h_\tau)(\xi,\lambda) = \frac{(2^{-2k} - \varsigma(\xi))}{[i\tau + \varsigma(\xi)][i\tau + 2^{-2k}]} \mathcal{F}(M_k h)(\xi, \tau + \lambda).$$

Pela Proposição 3.1 e usando o fato de que h_τ é um multiplicador em $\mathbf{L^p}$, $1 < p < \infty$ com norma

$$\|h_\tau\|_p \lesssim \frac{2^{-2k}|\beta|^{-1/4}}{\tau^2 + 2^{-4k}}. \tag{3.70}$$

temos

$$\|S_k h\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}^2)} \leq \int_{\mathbb{R}} \|h_\tau\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)} d\tau \leq c(\beta) \, \|M_k h\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}^2)}$$

Se $k > 0$.
De (3.66) e (3.69) temos que se $\xi \in supp\mathcal{F}(h)$ então:

$$\varsigma(\xi) \sim |\xi - \xi_0^+| \, |\xi - \xi_0^-| \sim 2^{-k}.$$

O resto da prova é igual que no caso $k \leq 0$, com 2^{-k} no lugar de 2^{-2k}.
Portanto temos o resultado. □

Como uma conseqüência do Lema 3.7 não é dificil provar o seguinte lema usando a mesma demonstração do Lema 2.5 de [30],

Lema 3.8. *Seja $g \in \mathcal{C}^{3,1}(\mathbb{R} \times [t_1,t_2])$, se para todo $\theta > 0$ tem-se*

$$\sum_{j \leq 2} |\partial_x^j g(x,t)| \leq c_\theta e^{-\theta|x|}, \quad t \in [t_1,t_2],$$

e $g(x,t_1) = g(x,t_2) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então

$$\|e^{\lambda x} g\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}\times[\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}])} \leq c(\beta) \|e^{\lambda x}(\partial_t + i\alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x^3) g\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}\times[\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}])}, \tag{3.71}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $c = c(\beta)$ independente de λ, α.

Lema 3.9. *Suponha que* $u = u(x,t) \in \mathcal{C}([t_1,t_2];\mathbf{H^4}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([t_1,t_2];\mathbf{H^1}(\mathbb{R}))$ *tal que* u *é uma solução de HK, com:*

$$supp\, u(x,t_1) \subseteq (-\infty, b],$$

então $\forall\theta > 0$

$$\sum_{j\leq 2} |\partial_x^j u(x,t)| \leq c_{b,\theta} e^{-\theta x} \qquad t \in [t_1,t_2]\,,\; x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Da hipótese do lema temos

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]} \|u(\cdot,t)\|_{\mathbf{H^4}} < \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} |\partial_x^j u(x,t_1)|^2 dx \leq e^{\theta b} \|u(t_1)\|_{\mathbf{H^4}} \quad j = 0,1,\cdots,4.$$

Portanto pelo Lema 3.6

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]} \|u(\cdot,t)e^{\theta x}\|_{\mathbf{H^3}} < \infty \quad \forall\theta > 0.$$

O resultado segue-se pelo teorema de imersão de Sobolev. □

3.2.3 Prova do Teorema 3.3

Se $u = u(x,t)$ é solução da equação HK, com $u \in \mathcal{C}([t_1,t_2];\mathbf{H^s}) \cap \mathcal{C}^1([t_1,t_2];\mathbf{H^1})$, $s \geq 4$ temos:

$$(\partial_t + i\alpha\partial_x^2 + \beta\partial_x^3)u_R(x,t) = -\mu_R V u + F_R,$$

onde $u_R(x,t) = \mu_R(x)u(x,t)$, $\mu_R = \mu(x/R)$, $\mu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, não decrescente para $x > 0$, tal que

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 2 \\ 0 & \text{se } x < 1. \end{cases} \tag{3.72}$$

$$F_R = i\alpha(u\partial_x^2\mu_R + 2\partial_x\mu_R\partial_x u) + \beta(u\partial_x^3\mu_R + 3\partial_x^2\mu_R\partial_x u + 3\partial_x^2 u\partial_x\mu_R).$$

$$V = i\gamma|u|^2 + \delta\overline{u}\partial_x u + \epsilon u\partial_x\overline{u} \in \mathbf{L^p}(\mathbb{R}\times[\mathbf{t_1},\mathbf{t_2}]) \quad p \geq 1. \tag{3.73}$$

Isto tem-se usando o teorema de imersão $\|u\|_{\mathbf{L^q}} \leq c_q \|u\|_{\mathbf{H^{1/2}}}$, $q > 2$ pois nós temos que $\sup_{t\in[t_1,t_2]} \|u(\cdot,t)\|_{\mathbf{H^4}} < \infty$. Pelo Lema 3.9 temos

$$\sum_{j=0}^{2} |\partial_x^j (u_R)(x,t)| \leq C(R,\mu,b,\theta)e^{-\theta x} \quad t \in [t_1,t_2],\ x \in \mathbb{R},$$

além disto por (3.43) é $u_R(x,t_1) = u_R(x,t_2) = 0$ para R grande, portanto por (3.73), pelo Lema 3.8 e usando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \|e^{\lambda x}u_R\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}\times[t_1,t_2])} \leq& c\|e^{\lambda x}u_R\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}\times[t_1,t_2])}\|V\|_{\mathbf{L^{4/3}}(\{|x|\geq R\}\times[t_1,t_2])} \\ &+ c\|e^{\lambda x}F_R\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}\times[t_1,t_2])} \\ \leq& \frac{1}{2}\|e^{\lambda x}u_R\|_{\mathbf{L^8}(\mathbb{R}\times[t_1,t_2])} + c\|e^{\lambda x}F_R\|_{\mathbf{L^{8/7}}(\mathbb{R}\times[t_1,t_2])}, \end{aligned} \tag{3.74}$$

a última desigualdade implica

$$\Big(\int_{t_1}^{t_2}\int_{x>2R} e^{8\lambda(x-2R)}|u|^8 dx\, dt\Big)^{1/8} \leq C(R) < \infty. \tag{3.75}$$

Que chega a uma contradição quando $\lambda > 0$ arbitrariamente grande a menos de que $supp\, u(t) \subseteq (-\infty, 2R]$ para $t \in [t_1,t_2]$. Usando o Corolário 0.1 de Saut e Scheurer concluímos que $u(t) = 0$ para todo $t \in [t_1,t_2]$. □

Observação 3.6. *Usando o Teorema 3.1 (que prova continuação única para soluções de HK com suporte compacto num intervalo de tempo, usando o método de Bourgain), provado na seção anterior e sem usar o Corolário 0.1, obtemos o seguinte teorema*

Teorema 3.4. *Seja $u = u(x,t)$ solução de (3.1), com $u \in \mathcal{C}([t_1,t_2];\mathbf{H^s}) \cap \mathcal{C}^1([t_1,t_2];\mathbf{H^1})$, $s \geq 4$. Se existem $t_1 < t_2$, $0 < B < \infty$, tal que*

$$supp\, u(t_j) \subseteq [-B,B] \qquad t_j = 1,2.$$

Então

$$u(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in [t_1,t_2].$$

Demonstração: *A prova é exactamente igual como a prova do Teorema 3.3, pois neste caso temos*

$$supp\, u(t_j) \subseteq (-\infty, B],\ e\ \ supp\, u(t_j) \subseteq [-B,\infty).$$

Usamos como na demonstração do Teorema 3.3, primeiro a função $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, nao decrescente para $x > 0$, definida em (3.72), para obter (3.75) e portanto

$$supp\, u(t) \subseteq (-\infty, 2R], \quad t \in [t_1,t_2], \tag{3.76}$$

e depois a função $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, nao crescente para $x < 0$, tal que

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & se \;\; x \leq -2 \\ 0 & se \;\; x > -1. \end{cases}$$

para obter pelo mesmo argumento anterior

$$\Big(\int_{t_1}^{t_2} \int_{x<-2R} e^{8\lambda(x+2R)} |u|^8 dx\, dt \Big)^{1/8} \leq C(R) < \infty.$$

E esta desigualdade chega a uma contradição quando $\lambda < 0$ arbitrariamente grande a menos de que

$$supp\, u(t) \subseteq [-2R, \infty), \quad t \in [t_1, t_2]. \tag{3.77}$$

De (3.76) e (3.77) temos que

$$supp\, u(t) \subseteq [-2R, 2R], \quad t \in [t_1, t_2].$$

Concluímos a prova usando o Teorema 3.1. $\square$

Capítulo 4

Mal Colocação para a Equação de Hasegawa Kodama

Neste capítulo usaremos o método de [31] na equação (26), a qual tem as ondas solitárias com dois parâmetros (27) e provaremos que neste caso a aplicação dado-solução não é uniformemente contínua.

Na Seção 4.2, obteremos condições sobre os coeficientes α, β, γ, δ, ϵ sob as quais a equação HK não pode ser resolvida usando um método iterativo de Picard na equação integral

$$u(t) = U(t)u_0 - \int_0^t U(\tau, t)F(u(\tau))d\tau, \tag{4.1}$$

para ver isto estudaremos em espaços de Sobolev as condições dos coeficientes sob as quais não existe $T > 0$ tal que a aplicação dado-solução $u_0 \mapsto u(t)$ é $\mathcal{C}^3$ diferenciavel na origem. Seguiremos as idéias em [3] e [41].

4.1 Aplicação dado-solução não é uniformemente contínua.

Vejamos agora um caso particular onde a aplicação dado-solução não é uniformemente contínua.

Consideramos (26), é dizer (18) quando $\epsilon = 0$, $\delta \neq 0$, $\beta \cdot \delta > 0$ e $\gamma = (\alpha/3\beta)\delta$. Seguindo as idéias de Kenig et al. [31], consideramos as ondas solitárias $u_{\eta,N}(x,t)$ definidas em (27). Sejam $\varsigma > 0$, $-1 < 2s < 1/2$, $N > 0$ grande, $\eta = N^{-2s}$, $N_1 \sim N$ e $N_2 \sim N$, temos

$$\mathcal{F}(u_{\eta,N_j})(t,\xi) = \Theta(\eta, N_j, t)\mathcal{F}(f_\eta)(\xi - N_j), \quad j = 1, 2$$

onde $\Theta(\eta, N_j, t) = \exp\{i\phi(\eta, N_j)t - i\psi(\eta, N_j)t\}$.

O suporte de $\mathcal{F}(f_\eta)(\xi - N_j) = \mathcal{F}(f)((\xi - N_j)/\eta)$ está concentrado na bola $B_\eta(N_j)$, e para $\xi \in B_\eta(N_j)$ é $|\xi| \sim N$ pois $s > -1/2$, portanto

$$\begin{aligned}\|u_{\eta,N_1}(0) - u_{\eta,N_2}(0)\|^2_{\mathbf{H^s}} \lesssim & N^{2s} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f_\eta)(\xi - N_1) - \mathcal{F}(f_\eta)(\xi - N_2)|^2 d\xi \\ \lesssim & \frac{N^{2s}|N_1 - N_2|^2}{\eta} \\ = & (N^{2s}(N_1 - N_2))^2, \end{aligned} \tag{4.2}$$

agora no tempo t, temos

$$\|u_{\eta,N_1}(t) - u_{\eta,N_2}(t)\|^2_{\mathbf{H^s}} \sim N^{2s} \|u_{\eta,N_1}(t) - u_{\eta,N_2}(t)\|^2_{\mathbf{L^2}}.$$

O suporte de $u_{\eta,N_j}(t)$, $j = 1, 2$, está concentrado na bola $B_{\eta^{-1}}(-\psi(\eta, N_j)t)$ onde $\psi(\eta, N) = 2\alpha N + 3\beta N^2 - \eta^2 A^2 \beta$, portanto se $|\psi(\eta, N_1)t - \psi(\eta, N_2)t| \gg \eta^{-1}$, então

$$\|u_{\eta,N_1}(t) - u_{\eta,N_2}(t)\|^2_{\mathbf{L^2}} \gtrsim \|u_{\eta,N_1}(t)\|^2_{\mathbf{L^2}} + \|u_{\eta,N_2}(t)\|^2_{\mathbf{L^2}} \sim C, \tag{4.3}$$

mas

$$\begin{aligned}|\psi(\eta, N_1) - \psi(\eta, N_2)| = & |N_1 - N_2| \cdot |2\alpha + 3\beta(N_1 + N_2)| \\ \gtrsim & |N_1 - N_2| N.\end{aligned}$$

Logo para ter (4.3) basta que

$$|t|\, |N_1 - N_2| N \gg \eta^{-1} = N^{2s}. \tag{4.4}$$

Se tomamos $N_1 = N$ e $N_2 = N - \varsigma\eta$, então de (4.2)

$$\|u_{\eta,N_1}(0) - u_{\eta,N_2}(0)\|_{\mathbf{H^s}} \lesssim \varsigma,$$

e como $-1 < 2s < 1/2$, também obtemos (4.4) para $|t| \gg N^{-1+4s}$ e portanto (4.3). Em conseqüência a aplicação dado-solução não é uniformemente contínua. □

4.2 Aplicação dado-solução não é $\mathcal{C}^3$.

Teorema 4.1. *Sejam $T > 0$, X_T um espaço imerso em $\mathcal{C}([-T, T]; \mathbf{H^s})$. Então para $\phi \in \mathbf{H^s}$, $u \in X_T$ não existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|U(t)\phi\|_{X_T} \leq C\|\phi\|_{\mathbf{H^s}} \tag{4.5}$$

e

$$\Big\| \int_0^t U(t - t')[F(u)(\cdot, t')]dt' \Big\|_{X_T} \leq C\|u\|^3_{X_T}. \tag{4.6}$$

nos seguintes casos:
i) $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, $\delta = \epsilon$, $\gamma \neq 0$ *para* $s < 0$.
ii) $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, $\delta \neq \epsilon$ *para* $s < 1/2$.
iii) $\beta \neq 0$, $\delta \neq \epsilon$ *para* $s < 1/4$.
iv) $\beta \neq 0$, $\delta = \epsilon$, $\gamma \neq 0$ *para* $s < -1/4$.

Teorema 4.2. *Não existe* $T > 0$ *tal que (2.1) admite uma única solução e a aplicação dado-solução*

$$\phi \mapsto u(t), \qquad t \in [-T, T],$$

é $\mathcal{C}^3$ *diferenciavel em zero de* $\mathbf{H^s}$ *a* $\mathbf{H^s}$ *nos seguintes casos:*
i) $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, $\delta = \epsilon$, $\gamma \neq 0$ *para* $s < 0$.
ii) $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, $\delta \neq \epsilon$ *para* $s < 1/2$.
iii) $\beta \neq 0$, $\delta \neq \epsilon$ *para* $s < 1/4$.
iv) $\beta \neq 0$, $\delta = \epsilon$, $\gamma \neq 0$ *para* $s < -1/4$.

Um caso particular de i) é a equação de Schrödinger cúbica não linear ($\beta = 0$, $\delta = \epsilon = 0$, $\gamma = 1$), que sabemos não é localmente bem posta em $\mathbf{H^s}$, para $s < 0$.

Um caso particular de ii) é a equação de Schrödinger não linear com derivada (β=0, $\delta = 2$,$\epsilon = 1$), o melhor resultado local para esta equação em $\mathbf{H^s}$, para $s \geq 1/2$.

Um caso particular de iii) é a equação mKdV complexa ($\beta = 1$, $\delta = 1$, $\epsilon = 0$), que é localmente bem posta em $\mathbf{H^s}$, para $s \geq 1/4$.

Para provar o Teorema 4.1 precisaremos do seguinte resultado de cálculo elemental

Proposição 4.1. *Sejam* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *uma função contínua,* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *um conjunto de medida finita, se* $|f(x)| \geq c_0 > 0$ *para todo* $x \in A$ *então*

$$\Big| \int_A f(x)dx \Big| \geq c_0 |A|. \tag{4.7}$$

No que segue consideramos $N > 0$ grande e $\varsigma > 0$ pequeno. Temos os seguintes lemas

Lema 4.1. *Sejam* $I = [N, N + \varsigma]$, $\phi(\xi) := \alpha\xi^2 + \beta\xi^3$, $\phi_1(\xi_1, \xi_2, \xi) := (\xi_1 + \xi_2)(\xi - \xi_1)(2\alpha + 3\beta(\xi - \xi_2))$,

$$H = H(t, \xi_1, \xi_2, \xi) := \frac{e^{it\phi_1(\xi_1,\xi_2,\xi)} - 1}{\phi_1(\xi_1, \xi_2, \xi)}(\gamma + \delta\xi_1 + \epsilon\xi_2),$$

e uma função φ definida por

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \varsigma^{-1/2}N^{-s}\chi_I(\xi), \tag{4.8}$$

então

$$\int_0^t U(t-t')[F(U(t')\varphi)(x)]dt' = G(x,t), \tag{4.9}$$

o termo $G(x,t)$, esta definido pela seguinte igualdade

$$\mathcal{F}(G(\cdot,t))(\xi) := \frac{e^{it\phi(\xi)}}{\varsigma^{3/2}N^{3s}}\int_{A(\xi)} H d\xi_1 d\xi_2, \tag{4.10}$$

onde

$$A(\xi) := \{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2; \xi_1 \in I, -\xi_2 \in I, \xi-\xi_1-\xi_2 \in I\}.$$

Demonstração: Sabemos que $U(t)\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} \exp\{it\phi(\xi)+iy\xi)\}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)d\xi$, temos então

$$\int_0^t U(t-t')[F(U(t')\varphi)(x)]dt' = I_1 + I_2 + I_3,$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi+i(t-t')\phi(\xi)} i\gamma\mathcal{F}\{\ |U(t')\varphi|^2 U(t')\varphi\ \}d\xi dt'.\\
I_2 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi+i(t-t')\phi(\xi)} i\delta\mathcal{F}\{\ |U(t')\varphi|^2 \partial_{\xi'}\{U(t')\varphi\}\ \}d\xi dt'.\\
I_3 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi+i(t-t')\phi(\xi)} i\epsilon\mathcal{F}\{\ (U(t')\varphi)^2 \overline{\partial_{\xi'}\{U(t')\varphi\}}\ \}d\xi dt'.
\end{aligned}$$

Para simplificar a notação seja $\mathfrak{A} = e^{\{ix\xi+it\phi(\xi)\}}$, por ser $\mathcal{F}(U(t)\varphi)(\xi) = e^{\{it(\phi(\xi))\}}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)$ e usando (4.8) temos

$$\begin{aligned}
I_1 =& i\gamma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{A} \int_{\mathbb{R}^2} e^{it'\phi_1(\xi_1,\xi_2,\xi)}\mathcal{F}(\varphi)(\xi-\xi_1-\xi_2)\mathcal{F}(\varphi)(\xi_1)\mathcal{F}(\overline{\varphi})(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 d\xi dt'.\\
=& i\gamma \int_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{A}\mathcal{F}(\varphi)(\xi-\xi_1-\xi_2)\mathcal{F}(\varphi)(\xi_1)\mathcal{F}(\overline{\varphi})(\xi_2)\int_0^t e^{it'\phi_1}dt' d\xi_1 d\xi_2 d\xi\\
=& \frac{\gamma}{\varsigma^{3/2}N^{3s}}\int_A \frac{e^{it\phi_1(\xi_1,\xi_2,\xi)}-1}{\phi_1(\xi_1,\xi_2,\xi)}\mathfrak{A}\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi.
\end{aligned}$$

onde $A := \{(\xi_1,\xi_2,\xi)\in\mathbb{R}^3; (\xi_1,\xi_2)\in A(\xi)\}$, e $\phi_1 = \phi_1(\xi_1,\xi_2,\xi) = \phi(\xi-\xi_1-\xi_2) + \phi(\xi_1) - \phi(-\xi_2) - \phi(\xi) = (\xi_1+\xi_2)(\xi-\xi_1)(2\alpha+3\beta(\xi-\xi_2))$. Igualmente temos que

$$\begin{aligned} I_2 =& \frac{\delta}{\varsigma^{3/2}N^{3s}}\int_A \frac{e^{it\phi_1(\xi_1,\xi_2,\xi)}-1}{\phi_1(\xi_1,\xi_2,\xi)}\,\xi_1\,\mathfrak{A}\,d\xi_1 d\xi_2 d\xi. \\ I_3 =& \frac{\epsilon}{\varsigma^{3/2}N^{3s}}\int_A \frac{e^{it\phi_1(\xi_1,\xi_2,\xi)}-1}{\phi_1(\xi_1,\xi_2,\xi)}\,\xi_2\,\mathfrak{A}\,d\xi_1 d\xi_2 d\xi. \end{aligned}$$

portanto

$$I_1 + I_2 + I_3 = G(x,t).$$

□

Lema 4.2. *Sejam $g(\xi_1,\xi_2) = \delta\xi_1 + \epsilon\xi_2 + \gamma$, $\xi\in\mathbb{R}$ fixo, com as notações do Lema 4.1, temos as seguintes afirmações*
i) *Para $(\xi_1,\xi_2)\in A(\xi)$ temos*

$$|\phi_1(\xi_1,\xi_2,\xi)| \lesssim C^{\beta}_{\phi_1} = \begin{cases} \varsigma^2 N & se\ \ \beta\neq 0 \\ \varsigma^2 & se\ \ \beta = 0,\ \alpha\neq 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

$$|g(\xi_1,\xi_2)| \gtrsim C^{\delta,\epsilon}_{g} = \begin{cases} N & se\ \ \delta\neq\epsilon \\ |\gamma| & se\ \ \delta=\epsilon. \end{cases} \tag{4.12}$$

ii) *Se $N<\xi<N+\varsigma$ então*

$$|A(\xi)| \gtrsim \varsigma^2. \tag{4.13}$$

iii)

$$supp\,\mathcal{F}(G(\cdot,t))(\xi) \subseteq [N-\varsigma, N+2\varsigma].$$

Demonstração: **i)** Pela definição de $A(\xi)$, temos que se $(\xi_1,\xi_2)\in A(\xi)$ então $N\leq \xi_1\leq N+\varsigma$, $-N-\varsigma\leq\xi_2\leq -N$, $N\leq \xi-\xi_1-\xi_2\leq N+\varsigma$, daqui obtemos

$$|\xi-\xi_1|\leq\varsigma,\ \ 2N\leq\xi-\xi_2\leq 2(N+\varsigma),\ \ |\xi_1+\xi_2|\leq\varsigma. \tag{4.14}$$

em conseqüência

$$|\phi_1(\xi_1,\xi_2,\xi)| \leq \varsigma^2(2\alpha+6\beta(N+\varsigma)).$$

Por outro lado é claro usando (4.14), que se $\delta=\epsilon$ então $|g(\xi_1,\xi_2)|\gtrsim|\gamma|$. Suponhamos portanto $\delta\neq\epsilon$, como $\xi_1\sim N$, $|\xi_2|\sim N$, se $\delta=0$, $\epsilon\neq 0$ ou $\epsilon=0$, $\delta\neq 0$ é evidente que neste caso $|g(\xi_1,\xi_2)| \gtrsim N$, suponhamos então que $\delta \neq 0$, $\epsilon \neq 0$, $|\delta| > |\epsilon|$ (o caso $|\delta| < |\epsilon|$ é parecido), temos

$$\begin{aligned}|g(\xi_1,\xi_2)| \geq& |\delta|\xi_1 - |\epsilon|\xi_2 - |\gamma|\\ \geq& |\delta|N - |\epsilon|(N+\alpha) - |\gamma|\\ \gtrsim& N.\end{aligned}$$

ii)

Não é dificil ver que

$$|A(\xi)| = \varsigma^2 - \frac{(\xi - N - \varsigma)^2 + (\xi - N)^2}{2} \geq \frac{\varsigma^2}{2}.$$

iii)

Pelo feito em i) temos que se $A(\xi) \neq \varnothing$ então $\xi \in [N-\varsigma, N+2\varsigma]$, logo se $\xi \notin [N-\varsigma, N+2\varsigma]$ teriamos $A(\xi) = \varnothing$ e portanto por (4.10) que $\mathcal{F}(G(\cdot,t))(\xi) = 0$.

Observação 4.1. *Se $N < \xi < N+\varsigma$, então a região formada por $A(\xi)$ é um hexágono, se $N+\varsigma < \xi < N+2\varsigma$, então $A(\xi)$ é um triângulo retângulo isóceles por cima da diagonal do cuadrado $I \times (-I)$, se $N-\varsigma < \xi < N$, $A(\xi)$ é um triângulo retângulo isóceles por baixo da diagonal do cuadrado $I \times (-I)$.*

Demonstração: **[Teorema 4.1]** Como em [41], suponhamos que existe $C > 0$ tal que temos (4.5) e (4.6). Tomando $u = U(t)\varphi$ em (4.6) temos

$$\Big\|G(\cdot,t)\Big\|_{X_T} \leq C\|U(t)\varphi\|^3_{X_T}. \tag{4.15}$$

Agora usando (4.5) e a imersão de X_T, para $t \in [-T,T]$ obtemos

$$\Big\|G(\cdot,t)\Big\|_{\mathbf{H^s}} \lesssim C\|\varphi\|^3_{\mathbf{H^s}} \lesssim C. \tag{4.16}$$

Provaremos que esta desigualdade é falsa tomando φ como em (4.8).

Sejam $k \in (1, 3/2)$, $a = k\varsigma$, $\theta > 0$ a ser escolhido depois e

$$\varsigma = \varsigma_\beta = \begin{cases} N^{(-\theta-1)/2} & \text{se } \beta \neq 0\\ N^{-\theta/2} & \text{se } \beta = 0,\ \alpha \neq 0.\end{cases} \tag{4.17}$$

De (4.9) temos que

$$\begin{aligned}\Big\|\int_0^t U(t-t')[F(U(t')\varphi)(\cdot)]dt'\Big\|_{\mathbf{H^s}} &= \|G(\cdot,t)\|_{\mathbf{H^s}}\\ &= \Big(\int_{[N-\varsigma,N+2\varsigma]} (1+\xi^2)^s|\mathcal{F}(G(\cdot,t))|^2 d\xi\Big)^{1/2}\\ &\gtrsim \frac{1}{\varsigma^{3/2}N^{3s}}\Big(\int_B (1+\xi^2)^s L(\xi)^2 d\xi\Big)^{1/2}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

onde $B = [N - \varsigma + a, N + 2\varsigma - a] \subseteq (N, N + \varsigma)$, $L(\xi) = \alpha^{3/2} N^s |\mathcal{F}(G(\cdot, t))(\xi)|$, por otro lado temos que

$$L(\xi) = \Big| \int_{A(\xi)} \frac{e^{it\phi_1} - 1}{\phi_1} g \Big| \gtrsim \Big| \int_{A(\xi)} \frac{\sin\{t\phi_1\}}{\phi_1} g \Big|,$$

de (4.11) e (4.17) , temos que $|\phi_1| \lesssim N^{-\theta}$, portanto por (4.12), (4.13) e pela Proposição 4.1 temos que para $\xi \in B$

$$L(\xi) \gtrsim C_g^{\delta,\epsilon} |A(\xi)| \cdot |t| \gtrsim C_g^{\delta,\epsilon} \varsigma_\beta^2 |t|, \tag{4.19}$$

portanto de (4.16), (4.18) e (4.19) temos

$$\begin{aligned} C \gtrsim & \|G(\cdot, t)\|_{\mathbf{H}^s} \\ \gtrsim & \frac{\varsigma_\beta^2 C_g^{\delta,\epsilon} |t|}{\varsigma_\beta^{3/2} N^{3s}} N^s \varsigma_\beta^{1/2} \\ = & N^{-2s} C_g^{\delta,\epsilon} \varsigma_\beta |t|, \end{aligned}$$

e para diferentes valores de β, δ e ϵ, usando (4.12) e (4.17) encontramos:

$$N^{-2s} C_g^{\delta,\epsilon} \varsigma_\beta = \begin{cases} |\gamma|\, N^{-2s-\theta/2} & \text{se } \beta = 0, \;\; \alpha \neq 0, \;\; \delta = \epsilon \\ N^{-2s-\theta/2+1} & \text{se } \beta = 0, \;\; \alpha \neq 0 \;\; \delta \neq \epsilon \\ |\gamma|\, N^{-2s-\theta/2-1/2} & \text{se } \beta \neq 0, \;\; \delta = \epsilon \\ N^{-2s-\theta/2+1/2} & \text{se } \beta \neq 0, \;\; \delta \neq \epsilon. \end{cases}$$

que é uma contradição para N grande:
$\beta = 0, \; \alpha \neq 0, \; \delta = \epsilon$ e $\gamma \neq 0$, tomando $0 < \theta < -4s$, $s < 0$.
$\beta = 0, \;\; \alpha \neq 0, \;\; \delta \neq \epsilon$ tomando $0 < \theta < 2(1 - 2s)$, $s < 1/2$.
$\beta \neq 0, \;\; \delta = \epsilon$ e $\gamma \neq 0$, tomando $0 < \theta < -(1 + 4s)$, $s < -1/4$.
$\beta \neq 0, \;\; \delta \neq \epsilon$ tomando $0 < \theta < (1 - 4s)$, $s < 1/4$. □

Demonstração: **[Teorema 4.2]** Consideramos o seguinte PVI,

$$\begin{cases} \partial_t u + i\alpha \partial_x^2 u + \beta \partial_x^3 u + i\gamma |u|^2 u + \delta |u|^2 \partial_x u + \epsilon u^2 \partial_x \overline{u} = 0, \quad x, t \quad \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \eta \varphi(x). \end{cases} \tag{4.20}$$

Derivando na fórmula de Duhamel obtemos para $u = u(\eta, x, t)$, as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0} = & U(t)\varphi \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\Big|_{\eta=0} = & 0 \\ \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}\Big|_{\eta=0} = & C \int_0^t U(t - t')[F(U(t')\varphi)(x)] dt', \end{aligned}$$

portanto pelo Teorema 4.1, a terceira derivada da aplicação dado-solução não é contínua para os casos i), ii), iii) e iv). □

Observação 4.2. *1) Para o caso* $\beta \neq 0$, $\delta = \epsilon$ *e* $\gamma = 0$ *podemos usar a transformação (11) e trabalhar com* (12).
2) Notar que o exemplo considerado na Seção 4.1 é um caso particular de iii) ($\beta \neq 0$, $\epsilon \neq \delta$)*, portanto neste caso a aplicação dado-solução não somente não é* $\mathcal{C}^3$*, ela não é uniformemente contínua.*

Concluções e observações finais

No Capítulo 1, na prova do Efeito de Regularização Local, o operador integral LL^* com núcleo $K(\xi,\eta)$ na verdade é um operador definido de $\mathbf{L^p} \mapsto \mathbf{L^p}$ para $1 \le p \le \infty$, con norma $\|LL^*\| \sim (1+T)$. Com efeito, usando o Lema 1.2 é evidente que $LL^* : \mathbf{L^1} \mapsto \mathbf{L^1}$ e $LL^* : \mathbf{L^\infty} \mapsto \mathbf{L^\infty}$, em particular é $\mathbf{L^2} \mapsto \mathbf{L^2}$. Para obter o Lema 1.2, no argumento da prova derivamos e limitamos 3 vezes. Se derivamos e limitamos mais de 3 vezes, obteremos melhores propriedades para o núcleo $K(\xi,\eta)$ e portanto para o operador LL^*. Na estimativa da Função maximal, para provar o Lema 1.5 usamos um argumento direto, porem extenso. Seria interessante procurar uma técnica que simplifique a demonstração aqui apresentada. O método de demonstração seguido na prova do Teorema 1.3 é geral e aplicavel a famílias de operadores definidos por $V(t)u_0(x) = u_0 * I_t^\phi(x)$, onde $I_t^\phi(x)$, é uma família de integrais oscilatorias, desde que tenhamos uma limitação para estas integrais oscilatorias, assim como no Lema 1.5 e Lema 1.6 (que usamos para provar os teoremas da Função Maximal e as estimativas de tipo Strichartz).

Não conhecemos nenhum resultado de existência global para a equação HK, com coeficientes variáveis, e também nada sobre a existência de ondas solitárias. Consideramos que o nosso resultado de existência local para coeficientes variáveis é ótimo.

No Capítulo 2, provamos que o PVI para a equação HK (2.1), é globalmente bem posto para dados em $\mathbf{H^s}$, $s > 5/9$, o valor $5/9$ foi obtido por razões de caráter técnico. Pensamos que um melhor resultado (é dizer em $\mathbf{H^s}$, $1/4 < s < 5/9$) pode ser obtido, mediante uma aplicação mais precisa das estimativas lineares. É de notar que estas estimativas não podem ser melhoradas.

Por outro lado observamos que no caso de ter na equação HK (2.1), $\beta \neq 0$, $\gamma = (\delta-\epsilon)\alpha/3\beta$, $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_t u + i\frac{(\delta-\epsilon)\alpha}{3\beta}\partial_x^2 u + \beta\partial_x^3 u + i|u|^2 u + \delta|u|^2\partial_x u + \epsilon u^2 \partial_x \overline{u} = 0, & x,t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{4.21}$$

a transformação (11),

$$v(x,t) := \exp\{i\frac{\alpha}{3\beta}x + i\frac{\alpha^3}{27\beta^2}t\}u(x + \frac{\alpha^2}{3\beta}t, t), \tag{4.22}$$

nos leva para o PVI associado com a mKdV complexa (12).

$$\begin{cases} v_t + \beta\partial_x^3 v + \delta|v|^2\partial_x v + \epsilon v^2\partial_x\overline{v} = 0, & x,t \in \mathbb{R}, \\ v(x,0) = v_0(x). \end{cases} \tag{4.23}$$

Portanto provar que o PVI (4.21) é globalmente bem posto será equivalente a provar que o PVI (4.23) é globalmente bem posto. No caso de ser v_0 a valores reais, (4.23) é a equação mkdV,

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + (\delta+\epsilon)v^2\partial_x v = 0, & x,t \in \mathbb{R}, \\ v(x,0) = v_0(x). \end{cases} \tag{4.24}$$

Mas por [9], sabemos que esta equação é globalmente bem posta para dados em $\mathbf{H^s}$, $s > 1/4$, portanto obtemos que o PVI (4.21) é globalmente bem posto em $\mathbf{H^s}$, $s > 1/4$, para dados da forma

$$u_0 = e^{-i\frac{\alpha}{3\beta}x}v_0,$$

com v_0 sendo uma função a valores reais de $\mathbf{H^s}$, $s > 1/4$.

No PVI (4.23), consideramos a solução complexa da forma $v = v_1 + iv_2$, com v_1, v_2 reais, temos então que o PVI (4.23), é equivalente com o seguinte PVI,

$$\begin{cases} \partial_t v_1 + \beta\partial_x^3 v_1 + \delta(v_1^2+v_2^2)\partial_x v_1 + \epsilon(v_1^2-v_2^2)\partial_x v_1 + 2\epsilon v_1 v_2 \partial_x v_2 = 0, & x,t \in \mathbb{R}, \\ \partial_t v_2 + \beta\partial_x^3 v_2 + \delta(v_1^2+v_2^2)\partial_x v_2 - \epsilon(v_1^2-v_2^2)\partial_x v_2 + 2\epsilon v_1 v_2 \partial_x v_1 = 0, & x,t \in \mathbb{R}, \\ v_1(x,0) = v_{1\,0}(x), \\ v_2(x,0) = v_{2\,0}(x), \end{cases}$$

temos que se $v_{1\,0} = v_{2\,0}$, então $v_1 = v_2$, logo a solução do PVI (4.24) estará dada por $v = v_1 + iv_1$ onde v_1 é solucação do PVI

$$\begin{cases} \partial_t v_1 + \beta\partial_x^3 v_1 + 2(\delta+\epsilon)v_1^2\partial_x v_1 = 0, & x,t \in \mathbb{R}, \\ v_1(x,0) = v_{1\,0}(x). \end{cases} \tag{4.25}$$

Portanto temos também que o PVI (4.21) é globalmente bem posto em $\mathbf{H^s}$, $s > 1/4$ para dados da forma

$$u_0 = e^{-i\frac{\alpha}{3\beta}x}(v_0 + iv_0),$$

com v_0 uma função a valores reais de $\mathbf{H^s}$, $s > 1/4$. Isto nos anima a acreditar na possível existência de soluções globais para PVI (18), quando $\beta \neq 0$, para dados inicias em $\mathbf{H^s}$, $s > 1/4$.

No Capítulo 3, provamos princípios de continuação única quando $\beta \neq 0$. Supondo $\beta = 0$, nossa prova de decaimento exponencial não funciona. Recientemente Kenig et al. [32], encontraram um princípio de continuação única para a equação de Schrödinger cúbica não linear, NLS. Eles obtiveram estimativas de decaimento exponencial no intervalo de tempo $[0, 1]$, supondo decaimento exponencial em dois tempos, $t = 0, 1$. Para obter a propriedade de decaimento usaram estimativas da energia nas projeções da solução sobre a freqüência positiva e negativa, pois as soluções da equação NLS não preservam o decaimento exponencial, da forma como vimos nos Lemas 3.5 e 3.6.

Consideramos que é possível usar os mesmos argumentos seguindo as idéias de Bourgain, para encontrar um princípio de continuação única quando temos coeficientes variáveis.

A inexistência de ondas solitárias no caso geral, não permite provar mal colocação (aplicação dado solução não uniformemente contínua) em todos os casos, segundo os métodos hoje conhecidos. Também não podemos usar "scaling", mas graças ao Teorema 4.2, sabemos até que valores dos índices nos espaços de Sobolev, podemos usar métodos iterativos.

Por último observamos que os mesmos resultados obtidos neste trabalho, para a equação de Hasegawa Kodama podem ser obtidos também para a equação

$$\partial_t u + ia_0 u + a_1 \partial_x u + ia_2 \partial_x^2 u + a_3 \partial_x^3 u + i\gamma |u|^2 u + \delta |u|^2 \partial_x u + \epsilon u^2 \partial_x \overline{u} = 0,$$

com $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2, 3$.

Apéndice

O Teorema T1

Definição 4.1. *Seja* $f \in \mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{loc}}(\mathbb{R}^n)$*,* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *um cubo, definimos por*

$$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx.$$

o valor médio de f *sobre o cubo* Q*.*

Definição 4.2. *Consideramos a função maximal aguda*

$$M^* f(x) = \sup_Q \left\{ \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|;\ Q \text{ é cubo e } x \in Q \right\}.$$

Dizemos que a função f *tem oscilação media limitada (BMO) se e somente se* $M^* f(x) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$*.*

Definimos a relação de equivalência:

$$f\,\mathcal{R}\,g \text{ se e somente se } f - g = \text{constante.}$$

Ao espaço quociente (mediante esta relação) das funções com a propriedade BMO chamamos de espaço BMO, para $f \in BMO$ *definimos a norma*

$$\|f\|_* = \|M^* f\|_{\mathbf{L}^\infty}.$$

Definição 4.3. *Seja* $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n;\ x = y\}$*. Uma função* $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \Delta \mapsto \mathbb{C}$ *é um Núcleo Standard se existe* $\eta > 0$ *tal que*

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n+\eta}}, \tag{4.26}$$

$$|K(x,y) - K(x,y')| \leq C\frac{|y-y'|^\eta}{|x-y|^{n+\eta}} \quad \text{se} \quad |x-y| > 2|y-y'|, \tag{4.27}$$

$$|K(x,y) - K(x',y)| \leq C\frac{|x-x'|^\eta}{|x-y|^{n+\eta}} \quad \text{se} \quad |x-y| > 2|x-x'|. \tag{4.28}$$

Consideramos o operador T associado ao núcleo standard K, isto é para todo $f, g \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^n)$ tais que $supp\, f \cap supp\, g = \varnothing$, temos

$$(Tf, g) := \int_{\mathbb{R}^2} K(x,y) f(y) g(x) dx\, dy.$$

O operador adjunto T^* está definido por

$$(T^* f, g) = (f, Tg) \quad \forall\, f, g \in \mathbf{S}(\mathbb{R}^\mathbf{n}).$$

O núcleo standard associado ao operador T^* é $\; K^*(x,y) = K(y,x)$.

Definamos agora Tf para $f \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathcal{C}^\infty$ como um elemento do dual das funções:

$$\mathcal{D} = \Big\{ g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = 0 \Big\}.$$

Seja $g \in \mathcal{D}$ com $supp\, g \subset B_R(0)$ e sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty$, tais que $supp\, \varphi_1 \subset B_{3R}(0)$, $\varphi_1 = 1$ em $B_{2R}(0)$ e $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, então definimos Tf como

$$(Tf, g) := (Tf\varphi_1, g) + \int_{\mathbb{R}^2} [K(x,y) - K(0,y)] f(y) \varphi_2(y) g(x) dx\, dy.$$

Para $f \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathcal{C}^\infty$ dizemos que $Tf \in BMO$ se existe $b \in BMO$ tal que

$$(Tf, g) = (b, g).$$

Definição 4.4. *O operador T tem a Propriedade de Limitação Fraca (propriedade WBP) se para todo subconjunto $B \subset \mathcal{C}_0^\infty$, existe $C = C(B)$ tal que*

$$\forall \phi_1, \phi_2 \in B \quad |(T\phi_1^{x,R}, \phi_2^{x,R})| \leq CR^n,$$

onde $\phi_j^{x,R}(y) = \phi_j((y-x)/R)$, $j = 1, 2$.

Teorema 4.3. [**David-Journé**] *Um operador $T : \mathbf{S}(\mathbb{R}^\mathbf{n}) \mapsto \mathbf{S}'(\mathbb{R}^\mathbf{n})$ associado a um núcleo standard K se estende a um operador limitado em $\mathbf{L}^\mathbf{2}$ se e somente se*

1. *$T1 \in BMO$*
2. *$T^*1 \in BMO$*
3. *T tem a propriedade WBP.*

Demonstração: Veja [10], ou o Capítulo IX de [11].

Corolário 4.1. *Seja T um operador associado a um núcleo standard anti-simétrico K, $K(x,y) = -K(y,x)$*

$$(Tf, g) = \lim_{\eta \to 0} \int_{|x-y|>\eta} K(x,y) f(y) g(x) dy\, dx.$$

O operador T é limitado em $\mathbf{L}^\mathbf{2}$ se e somente se $T1 \in BMO$.

Demonstração: Não é dificil ver que T tem a Propriedade WBP e que $T^*1 = -T1$. □

Bibliografia

[1] H.A. Biagioni, F. Linares *Ill-posedness for the derivative Schrödinger and generalized Benjamin-Ono equations*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol 353, (2001), no. 9, 3649-3659.

[2] J. Bourgain, *On the Compactness of the support of Solutions of Dispersive Equations*, IMRN, International Mathematics Research Notices, Vol 9, (1997), 437-447.

[3] J. Bourgain, *Periodic Korteweg de Vries equation with measures as initial data*, Sel. Math. New. Ser., Vol 3, (1997), 115-159.

[4] J. Bourgain, *Refinements of Strichartz' Inequality and Applications to 2D-NLS with Critical Nonlinearity*, IMRN, International Mathematics Research Notices, Vol 5, (1998), 253-283.

[5] J. Bourgain, *New global well-posedness results for nonlinear Schrödinger Equations*, AMS Publications, (1999).

[6] T. Cazenave, F. Weissler *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger Equations in* $\mathbf{H^s}$, Nonlinear Anal., Vol 14, (1990), 807-836.

[7] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao *Global well-posedness for Schrödinger Equations with derivative*, SIAM J. Math. Anal., Vol 33, (2001), no. 3, 649-669.

[8] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao *Sharp global well-posedness for periodic and nonperiodic KdV and mKdV*, Preprint, (2001).

[9] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao *A refined global well-posedness result for Schrödinger Equations with derivative*, Preprint, (2002), 1-22.

[10] G. David, J. L. Journé *A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math. (2) , Vol 120, (1984), 371-397.

[11] J. Duoandikoetxea *Análisis de Fourier*, Universidade Autónoma de Madrid, 210p, 1991.

[12] H. Dym, H. P. McKean *Fourier series and integrals*, Academic press, New York, 161-169, 1972.

[13] G. Fonseca, F. Linares, G. Ponce, *Global Well-Posedness for the Modified Korteweg-de Vries Equation*, Communications in Partial Diferential Equations, Vol 24, (1999), 683-705.

[14] G. Fonseca, F. Linares, G. Ponce, *Unpublished manuscript.*

[15] J. Ginibre, G. Velo *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equation* , J. Math. Pures Appl., Vol 64 (9), (1985), 363-401.

[16] B. Guo. , S. Tan *On smooth solutions to the initial value problem for mixed nonlinear Schrödinger Equation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., Vol A 119, (1991), 31-45.

[17] A. Hasegawa, Y. Kodama,*Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide*, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol QE-23, Number 5, (1987), 510-524.

[18] N. Hayashi, *The initial value problem for the derivative nonlinear Schrödinger equation*, Nonlinear Anal., Vol 20, (1993), 823-833.

[19] N. Hayashi, T. Osawa, *On the derivative nonlinear Schrödinger equation in the energy space*, Phis. D., vol 55, (1992), 14-36.

[20] N. Hayashi, T. Osawa, *Finite energy solution of nonlinear Schrödinger equation of derivative type*, SIAM J. Math. Anal., vol 25, (1994), 1488-1503.

[21] N. Hayashi, T. Osawa, *Modified wave operators for the derivative nonlinear Schrödinger equation*, Math. Anal., vol 298, (1994), 557-576.

[22] R. J. Iorio. Jr, V. de Magalhães Iorio *Fourier analysis and partial differential equations*, Cambridge University Press., 2001.

[23] T. Kato *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Suppl. Stud., Stud. Appl. Math. vol 8, (1983), 93-128.

[24] D.J. Kaup, A.C. Newell, *An exact solution for a derivative Schrödinger equation*, J. Math. Phis., vol 19 (4), (1978), 798-801.

[25] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *On the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Duke Mathematical Journal, Vol 59, No. 3, (1989), 585-610.

[26] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation*, J. Amer. Math. Soc., Vol 4, Number 2, (1991), 323-347.

[27] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Oscillatory Integrals and Regularity of Dispersive Equations*, Indiana University Mathematics Journal, Vol 40, Number 1, (1991), 33-69.

[28] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Well-Posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation via the Contraction Principle*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol XLVI, (1993), 527-620.

[29] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Higher order non-linear dispersive equations*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol 122 (1), (1994), 157-166.

[30] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *On the Support of Solutions to the generalized KdV Equation*, Poincaré Anal. Non Linéaire, Vol 19, Num 2, (2002), 191-208.

[31] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *On the ill-posedness of some canonical dispersive equations*, Duke Mathematical Journal, Vol 106, No. 3, (2001), 617-633.

[32] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *On unique continuation for the nonlinear Schrödinger equation*, Preprint, (2002), 585-610.

[33] C. E. Kenig, A. Ruiz, *A strong type (2,2) estimate for a maximal operator associated to the Schrödinger Equation*, Transactions of the American Mathematical Society, vol 280, (1983), 239-246.

[34] Y. Kodama, *Optical solitons in a monomode fiber*, Journal of Statistical Phys., Vol 39 (5,6), (1985), 597-614.

[35] P. Koosis, *The logaritmic integral I*, Cambridge university press., 1988.

[36] C. Laurey, *The Cauchy problem for a third order nonlinear Schrödinger equation*, C.R.A.S. Paris, Serie I 315, (1992), 165-168.

[37] C. Laurey, *The Cauchy Problem for a Third Order Nonlinear Schrödinger Equation*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol 29, Number 2, (1997), 121-158.

[38] C. Laurey, *On a Nonlinear Dispersive Equation with Time Dependent Coeficients*, Advances in Differential Equations, Vol 6, Number 5, (2001), 577-612.

[39] J. L. Lions, *Contrôle des systèmes distribués singuliers*, Gauthier-Villars, Paris, 1983.

[40] G. Lorentz, *Approximation of functions*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1996.

[41] L. Molinet, J. C. Saut, N. Tzvetkov, *Ill-posedness issues for the Benjamin-Ono and related equations*, SIAM. J. Math. Anal., Vol 4, Number 4, (2001), 982-988.

[42] P.V. Mamyshev, *Generation and compression of femtosecond solitons in optical fibers*, Optical Solitons-Theory and experiment, J.R. Taylor Ed Cambridge Studies in Modern Optics, Vol 10, (1992), 266-313.

[43] G. Perla Menzala, C. F. Vasconcellos, E. Zuazua, *Stabilization of the Korteweg de Vries equation with localized damping*, Quarterly of applied mathematics, Vol LX, Number 60, (2002), 111-129.

[44] T. Osawa, *On the nonlinear Schrödinger equations of derivative type*, Indiana Univ. Math. J., Vol 45, (1996), 137-163.

[45] T. Osawa, Y. Tsutsumi, *Space-time estimates for null gauge forms and nonlinear Schrödinger equations*, Differential Integral Equations, Vol 11, (1998), 201-222.

[46] J. C. Saut, R. Teman, *Generic properties of Navier-Stokes equations: Genericity with respect to the boundary values*, Indiana Math. J., Vol 29, (1980), 427-446.

[47] J. C. Saut, B. Scheurer, *Unique continuation for some evolution equations*, J. Diff. Eqs., Vol 66, (1987), 118-139.

[48] G. Staffilani, *On the Generalized Korteweg-de Vries-Type Equations*, Differential and Integral Equations, Vol 10, Number 4, (1997), 777-796.

[49] E. Stein, G. Weiss *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, (1971).

[50] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Ortogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, (1993).

[51] H. Takaoka, *Well-posedness for the one dimensional Schrödinger equation with the derivative nonlinearity*, Adv. Diff. Eq., Vol 4, (1999), 561-680.

[52] H. Takaoka, *Global well-posedness for Schrödinger equation with derivative in a nonlinear term and data in low-order Sobolev spaces*, Electron. J. Diff. Eqns, Vol 42, (2001), 1-23.

[53] M Tsutsumi, I. Fukuda, *On solutions of the derivative nonlinear Schrödinger equation: existence and uniqueness theorem*, Funkcial. Ekvac., Vol 23, (1980), 259-277.

[54] M Tsutsumi, I. Fukuda, *On solutions of the derivative nonlinear Schrödinger equation II*, Funkcial. Ekvac., Vol 234, (1981), 85-94.

[55] Y. Tsutsumi $\mathbf{L^2}$-*solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*, Funkcial. Ekvac., Vol 30, (1987), 115-125.

[56] B. Zhang, *Unique continuation for the Korteweg-de Vries equation*, SIAM J. Math. Anal, Vol 23, (1992), 55-71.